Câu 1: **[Mức độ 3]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+4)^2+y^2+(z-3)^2=16$. Từ gốc toạ độ O kẻ tiếp tuyến OM bất kì (M là tiếp điểm) với mặt cầu (S). Khi đó điểm M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình nào sau đây?

A. $4x-3z+9=0$. **B.** $-4x+3z+9=0$. **C.** $4x-3z+6=0$. **D.** $4x-3z+15=0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OI}=(-4;0;3)\Rightarrow OI=5$.

Vì OM là tiếp tuyến của mặt cầu (S) nên ta có: $OM\perp IM\Rightarrow OM=\sqrt{OI^2-IM^2}=\sqrt{OI^2-R^2}=3$.

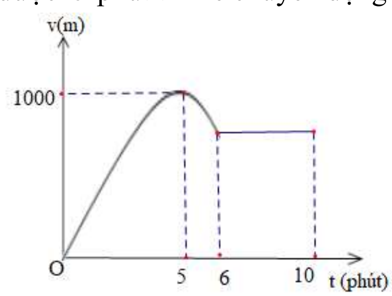
Suy ra M luôn thuộc mặt cầu (S') có tâm là gốc toạ độ O, bán kính $R'=3$.

Ta có phương trình mặt cầu $(S'):x^2+y^2+z^2=9$

Vậy $M\in(S)\cap(S')\Rightarrow$ tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}(x+4)^2+y^2+(z-3)^2=16 & (1)\\ x^2+y^2+z^2=9 & (2)\end{cases}$. Trừ vế theo vế (1) và (2) ta có pt $4x-3z+9=0$.

Câu 2: **[Mức độ 2]** Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong Parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều (hình vẽ).



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong 10 phút đầu tiên kể từ lúc bắt đầu là bao nhiêu mét?

A. $8160\,(m)$. **B.** $8610\,(m)$. **C.** $10\,000\,(m)$. **D.** $8320\,(m)$.

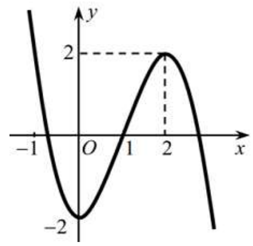
Lời giải

Giả sử trong 5 phút đầu vận tốc của ô tô được biểu diễn bởi phương trình $v(t)=at^2+bt+c$. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}c=0\\ \dfrac{-b}{2a}=5\\ 25a+5b+c=1000\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10a+b=0\\ 25a+5b=1000\\ c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-40\\ b=400\\ c=0\end{cases}\Rightarrow v(t)=-40t^2+400t.$$

Khi $t=6$ ta có $v(6)=960$ m/phút. Suy ra trong 10 phút đầu xe ô tô chuyển động được quãng đường là $S=\int_0^6(-40t^2+400t)dt+960.4=4320+3840=8160\ (m)$.

Câu 3: **[Mức độ 4]** Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc ba và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-100;100\right]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1+mx^2}}{f(x)-m}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. 100. **B.** 99. **C.** 2. **D.** 196.

Lời giải

TH1: $m=0\Rightarrow y=\dfrac{1}{f(x)}$.

Đồ thị hàm số có một TCN $y=0$ và ba tiệm cận đứng nên $m=0$ không thoả mãn.

TH2: $m<0$

Đồ thị hàm số không có TCN

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ $f(x)=m$ có nghiệm, trong đó có đúng hai nghiệm thoả mãn $1+mx^2\ge 0$.

Mà m là số nguyên nên dựa vào đồ thị ta chỉ cần xét $m\in\{-2;-1\}$.

+ Với $m=-2\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{1-2x^2}}{f(x)+2}$. Khi đó $f(x)=-2$ có hai nghiệm $x_1=0$; $x_2=a>2$. Nghiệm x_2 không thoả mãn điều kiện $1-2x^2\ge 0$ nên $m=-2$ không thoả mãn

+ Với $m=-1\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{f(x)+1}$ Khi đó $f(x)=-1$ có hai nghiệm $x_1=b\in(-1;0)$; $x_2=c\in(0;1)$. Cả hai nghiệm đều thoả mãn điều kiện $1-x^2\ge 0$ nên $m=-1$ thoả mãn.

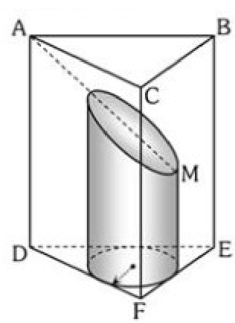
TH3: $m>0$. Khi đó $1+mx^2\ge 0,\forall x\in R$.

Đồ thị hàm số có một TCN $y=0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ $f(x)=m$ có đúng một nghiệm $x\in R\Leftrightarrow m>2$

Vì m nguyên thuộc đoạn $[-100;100]\Rightarrow\begin{cases}m\in Z\\ m\in[3;100]\cup\{-1\}\end{cases}$ nên có 99 giá trị.

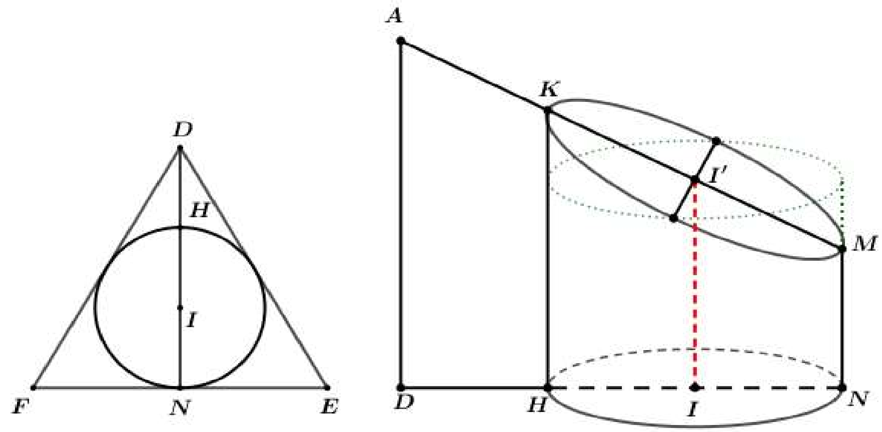
Câu 4: **[Mức độ 3]** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$ có tất cả các cạnh bằng a. Xét (T) là hình trụ nội tiếp lăng trụ. Gọi M là tâm của mặt bên $BCFE$, mặt phẳng chứa AM và song song với BC cắt (T) như hình vẽ bên dưới.



Thể tích phần còn lại (như hình trên) của khối (T) bằng

A. $\dfrac{\pi a^3}{18}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{54}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{27}$. **D.** $\dfrac{5\pi a^3}{54}$.

Lời giải



Dễ thấy $DH = HI = IN = \frac{1}{3}DN = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Từ đó ta có: $\begin{cases} AD + II' = 2HK \\ HK + MN = 2II' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD + II' = 2HK \\ 2HK + 2MN = 4II' \end{cases} \Rightarrow AD + 2MN = 3II' \Rightarrow II' = \frac{2a}{3}$.

Thể tích phần còn lại của khối (T) là $V = II'.S_{day} = \frac{2a}{3}.\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi a^3}{18}$.

Câu 5: **[Mức độ 3]** Có bao nhiêu số tự nhiên m để phương trình $2^m + 2^{3m+2} = \left(x + \sqrt{9 - x^2}\right)\left(5 + x\sqrt{9 - x^2}\right)$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

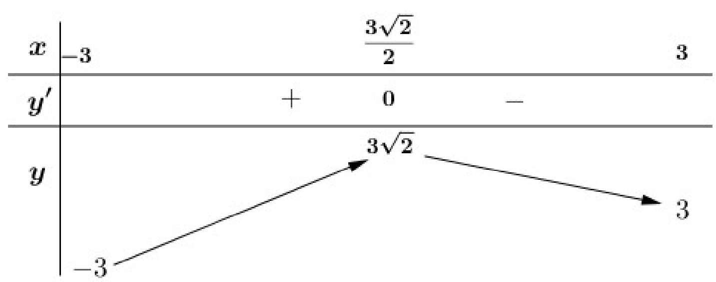
Lời giải

Điều kiện xác định: $-3 \le x \le 3$.

Đặt $y = x + \sqrt{9 - x^2} \Rightarrow x\sqrt{9 - x^2} = \frac{y^2 - 9}{2}$.

Ta có $y'(x) = 1 + \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$. $y'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 9 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Bảng biến thiên $y(x) = x + \sqrt{9 - x^2}$ trên $[-3;3]$:



Suy ra $-3 \le y \le 3\sqrt{2}$.

Phương trình trở thành: $2^m + 2^{3m+2} = y.\left(5 + \frac{y^2 - 9}{2}\right) \Leftrightarrow 2^{m+1} + 2^{3m+3} = y\left(y^2 + 1\right)$

Đặt $a = 2^{m+1} \Rightarrow a^3 + a = y^3 + y \Leftrightarrow a = y \Rightarrow 2^{m+1} = y$.

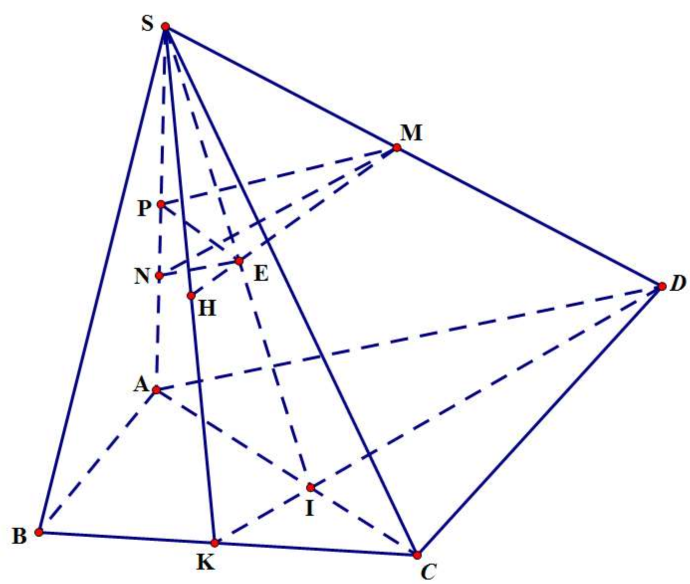
Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -3 \le 2^{m+1} \le 3\sqrt{2} \Rightarrow m \le \log_2\left(3\sqrt{2}\right) - 1$.

Vì $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$. Vậy có hai số tự nhiên m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 6: **[Mức độ 4]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại B và C, $BC = CD = 2a$ và $AB = a.$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là trung điểm SD, N là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NS} = \vec{0}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M, N và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Tính $\cos\left((\alpha);(ABCD)\right)$.

A. $\frac{3\sqrt{6}}{8}$ **B.** $\frac{9}{\sqrt{141}}$. **C.** $\frac{\sqrt{15}}{9}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{8}$.

Lời giải



Xem hình thang $ABCD$ được cắt ra từ hình vuông cạnh $2a$.

Gọi K là trung điểm BC. Dễ dàng chứng minh được $DK \perp AC$ (1). Lại có $DK \perp SA$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DK \perp (SAC) \Rightarrow DK // (\alpha)$ (vì (α) chứa M, N nên $DK \not\subset (\alpha)$)

Ta có $(\alpha) \cap (SKD) = MH // KD$ (H thuộc SK). Gọi $AC \cap KD = \{I\}; HM \cap SI = \{E\}$.

Do M là trung điểm của SD suy ra E là trung điểm SI.

Gọi P là trung điểm SA $\Rightarrow (PME) // (ABCD)$.

$ME//DK,\ DK\perp(SAC)\Rightarrow ME\perp(SAC)\Rightarrow(MNE)\perp(SAC)$

$\Rightarrow((\alpha);(ABCD))=((MNE);(PME))=\widehat{PEN}$.

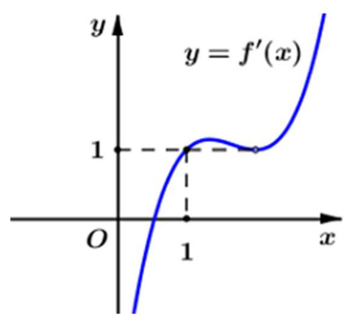
Ta có $S_{ACD}=\frac{1}{2}AC.DI=\frac{1}{2}BC.CD=2a^2\Leftrightarrow DI.AC=4a^2\Leftrightarrow DI=\frac{4a^2}{AC}=\frac{4a^2}{a\sqrt{5}}=\frac{4a}{\sqrt{5}}$.

$AI=\sqrt{AD^2-ID^2}=\sqrt{5a^2-\left(\frac{4a}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{3a}{\sqrt{5}}$.

Có $PE=\frac{1}{2}AI=\frac{3a}{2\sqrt{5}};PN=\frac{1}{6}SA=\frac{a\sqrt{3}}{6}\Rightarrow\tan\widehat{PEN}=\frac{PN}{PE}=\frac{\sqrt{15}}{9}$

Do đó $\cos\widehat{PEN}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 7: **[Mức độ 4]** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho bởi hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(1;2021)$ để bất phương trình $f(1-m^2)-f(-x^2+2mx+1-3m^2)<x^2-2mx+2m^2$ có nghiệm?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải

$f(1-m^2)-f(-x^2+2mx+1-3m^2)<x^2-2mx+2m^2$

$\Leftrightarrow -x^2+2mx+1-3m^2-f(-x^2+2mx+1-3m^2)<1-m^2-f(1-m^2)\ \ (*)$

Ta có:

$1-m^2<0,\forall m\in(1;2021)$.

$-x^2+2mx+1-3m^2=-(x-m)^2-2m^2+1<0,\forall m\in(1;2021),\forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(t)=t-f(t),t<0$.

Có $g'(t)=1-f'(t)>0,\forall t<0$ (do từ đồ thị ta có $f'(x)<0,\forall x<0$)

Vậy $g(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.

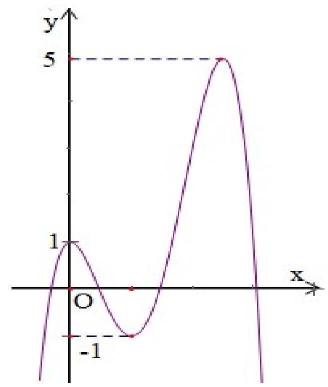
$(*)$ có dạng $g(-x^2+2mx+1-3m^2)<g(1-m^2)$

$\Leftrightarrow -x^2+2mx+1-3m^2<1-m^2$

$\Leftrightarrow -x^2+2mx-m^2<m^2 \Leftrightarrow -(x-m)^2<m^2$ (luôn đúng $\forall m\in(1:2021),\forall x\in\mathbb{R}$.

Vì m nguyên nên $m\in\{2;3;...;2020\}$. Vậy có 2019 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: **[Mức độ 4]** Cho đồ thị hàm số bậc bốn $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn [-2020 ; 2021] để hàm số $g(x)=f^2(x)-mf(x)$ có đúng hai điểm cực đại là.



A. 2027. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2022.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số của $y=f(x)$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)-mf(x)$, ta có $g'(x)=2f(x)f'(x)-mf'(x)=f'(x)[2f(x)-m]$.

Có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=\dfrac{m}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=a \\ x=b \\ f(x)=\dfrac{m}{2}\end{array}\right.$

Do $g(x)$ là hàm đa thức bậc chẵn, có hệ số của bậc cao nhất là số dương nên để hàm số $g(x)$ có đúng hai điểm cực đại thì $g'(x)$ phải đổi dấu đúng 5 lần thì $g(x)$ sẽ có ba điểm cực tiểu và hai điểm cực đại. Phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $x=0$, $x=a$, $x=b$. Vậy để $g'(x)$ phải đổi dấu đúng 5 lần thì phương trình $f(x)=\dfrac{m}{2}$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $0,a,b$ hoặc phương trình $f(x)=\dfrac{m}{2}$ có ba nghiệm, trong đó có đúng một nghiệm trùng $x=0$, $x=a$ hoặc $x=b$.

Trường hợp 1: Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác $0, a, b$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $\left[\begin{array}{l} 1<\dfrac{m}{2}<5 \\ \dfrac{m}{2}<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<m<10 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: Phương trình $f(x)=\dfrac{m}{2}$ có ba nghiệm, trong đó có đúng một nghiệm trùng $x=0$, $x=a$ hoặc $x=b$.

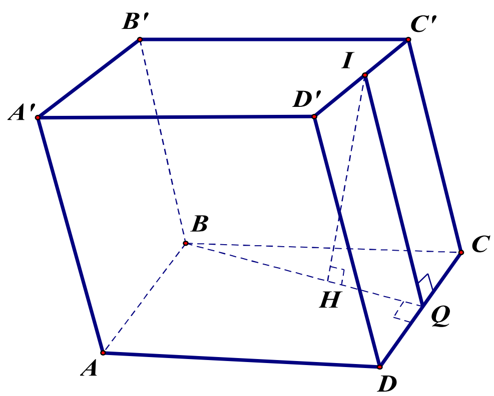
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{2}=1 \\ \dfrac{m}{2}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta có 2027 số nguyên m thuộc đoạn $[-2020;2021]$.

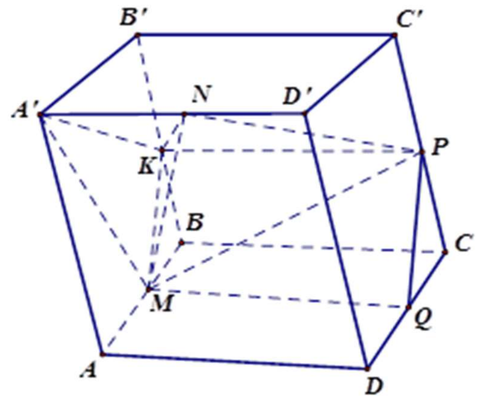
Câu 9: **[Mức độ 4]** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ADC}=120^0$. Mặt bên $DCC'D'$ là hình chữ nhật và tạo với mặt đáy một góc 60^0. Gọi M, N, P, K lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, A'D', CC', BB'$. Tính thể tích khối đa diện $MNPKA'$ theo a biết $AA'=2a$.

A. $\dfrac{3a^3}{16}$. **B.** $\dfrac{9a^3}{16}$. **C.** $\dfrac{9a^3}{32}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{32}$.

Lời giải



Từ giả thiết suy ra tam giác BCD đều cạnh a. Gọi Q, I lần lượt là trung điểm của $CD, C'D'$ thì $DC \perp BQ; DC \perp IQ \Rightarrow (DCC'D', ABCD) = \angle IQB = 60^0$. Kẻ $IH \perp BQ$ thì IH là đường cao của lăng trụ và $IH = IQ\sin 60^0 = \sqrt{3}a \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.IH = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}.\sqrt{3}a = \dfrac{3a^3}{2}$.



Ta có $V_{MNPKA'} = V_{NKMA'} + V_{NKMP}$.

Gọi Q là trung điểm của CD. Suy ra $KMQP$ là hình bình hành. Vậy $S_{\Delta KMP} = S_{\Delta PMQ}$.

Lại có $d\left(N;\left(KMP\right)\right) = d\left(D';\left(PMQ\right)\right)$ nên $V_{N.KMP} = V_{D'.PMQ} = V_{M.PQD'}$.

Ta có: $S_{\vartriangle PQD'} = S_{CDC'D'} - S_{\vartriangle PCQ} - S_{\vartriangle D'QD} - S_{\vartriangle D'C'P} = 2a.a - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}a.a - \frac{1}{2}.2a.\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a.a = \frac{3a^2}{4}$.

Do đó: $\dfrac{V_{M.PQD'}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \dfrac{\frac{1}{3}.S_{\vartriangle PQD'}.d(M,(DCC'D'))}{S_{DCC'D'}.d(A',(DCC'D'))} = \dfrac{\frac{1}{3}.S_{\vartriangle PQD'}}{S_{DCC'D'}} = \dfrac{\frac{1}{3}.\frac{3a^2}{4}}{2a.a} = \dfrac{1}{8}$

$\Rightarrow V_{N.PQD'} = \frac{1}{8}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{8}.\frac{3a^3}{2} = \frac{3a^3}{16}$.

Ta có: $S_{\vartriangle KMA'} = S_{\vartriangle PQD'} = \frac{3a^2}{4}$;

$$\frac{V_{N.KMA'}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{1}{3}.S_{\vartriangle KMA'}.d(N,(ABB'A'))}{S_{ABB'A'}.d(D',(ABB'A'))} = \frac{\frac{1}{3}.S_{\vartriangle KMA'}}{S_{ABB'A'}}.\frac{d(N,(ABB'A'))}{d(D',(ABB'A'))} = \frac{\frac{1}{3}.\frac{3a^2}{4}}{2a.a}.\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$\Rightarrow V_{N.KMA'} = \frac{1}{16}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{16}.\frac{3a^3}{2} = \frac{3a^3}{32}$.

Vậy ta có $V_{MNPKA'} = V_{NKMA'} + V_{NKMP} = \frac{9a^3}{32}$.

Câu 10: **[Mức độ 4]** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và luôn nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(0\right) = e^2$ và $2\sin 2x\left[f\left(x\right) + e^{\cos 2x}.\sqrt{f\left(x\right)}\right] + f'\left(x\right) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ thuộc khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $2\sin 2x.f\left(x\right) + f'\left(x\right) = -e^{\cos^2 x - \sin^2 x}\sin 2x.\sqrt{f\left(x\right)}$

$\Leftrightarrow \sin 2x.e^{\sin^2 x}.\sqrt{f\left(x\right)} + e^{\sin^2 x}.\dfrac{f'\left(x\right)}{2\sqrt{f\left(x\right)}} = -e^{\cos^2 x}\sin 2x \Rightarrow \int\left(e^{\sin^2 x}.\sqrt{f\left(x\right)}\right)'dx = \int e^{\cos^2 x}\,d\left(\cos^2 x\right)$

$\Rightarrow e^{\sin^2 x}.\sqrt{f(x)} = e^{\cos^2 x} + C$

Mà $f(0) = e^2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \sqrt{f(x)} = e^{\cos^2 x - \sin^2 x} \Rightarrow f(x) = e^{2\cos 2x}$.

Vậy $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{e} \approx 0,37$.

Câu 11: **[Mức độ 4]** Có bao nhiêu cặp $(x;y)$ thỏa mãn $10^{\frac{10}{x+y}} = \left(x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)10^{\frac{1}{xy}}$ và $x \in \mathbb{N}^*$, $y > 0$.

A. 14. **B.** 7. **C.** 21. **D.** 10.

Lời giải

$10^{\frac{10}{x+y}} = \left(x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).10^{\frac{1}{xy}} \Leftrightarrow 10^{\frac{10}{x+y}} = \frac{(x+y)(xy+1)}{xy}.10^{\frac{1}{xy}} \Leftrightarrow \frac{10}{x+y}.10^{\frac{10}{x+y}} = \left(1 + \frac{1}{xy}\right).10^{\frac{1}{xy}+1}$

Xét hàm số $f(t) = t.10^t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

$f'(t) = 10^t + t.10^t \ln 10 > 0, \quad \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = t.10^t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Do đó: $\frac{10}{x+y}.10^{\frac{10}{x+y}} = \left(1 + \frac{1}{xy}\right).10^{\frac{1}{xy}+1} \Leftrightarrow \frac{10}{x+y} = 1 + \frac{1}{xy}$

$\Leftrightarrow 10 = (x+y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) \Leftrightarrow 10 - \left(y + \frac{1}{y}\right) = x + \frac{1}{x}$.

Vì $y + \frac{1}{y} \geq 2, \ \forall y > 0$ nên $x + \frac{1}{x} \leq 8 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{15} \leq x \leq 4 + \sqrt{15}$, $x \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x \in A = \{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Với mỗi số $a > 0$ phương trình $y + \frac{1}{y} = a \Leftrightarrow y^2 - ay + 1 = 0$ (*) có $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = a > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) luôn có hai nghiệm $y > 0$. Vậy có 14 cặp $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.