

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC) .

A. $d = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

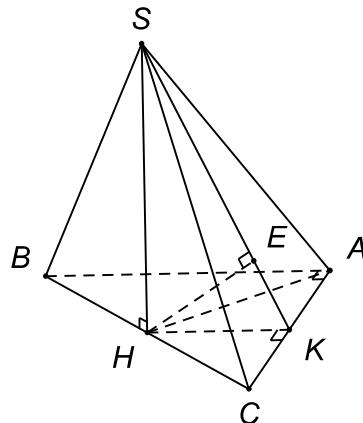
B. $d = a$.

C. $d = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC , suy ra $HK \perp AC$.

Kẻ $HE \perp SK$ ($E \in SK$).

$$\text{Khi đó } d[B,(SAC)] = 2d[H,(SAC)] = 2HE = 2 \cdot \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$; $SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BC là

A. $a\sqrt{2}$.

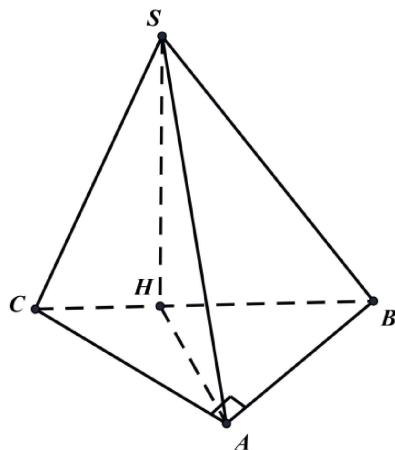
B. $a\sqrt{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có vì $SA \perp SB \perp SC$ nên $\Rightarrow S$ nằm trên đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với đáy. Mà ΔABC vuông cân tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là trung điểm H của BC . Vậy S nằm trên đường thẳng đi qua H vuông góc với (ABC) .

Mà góc giữa đường thẳng SA và (ABC) là $60^\circ \Rightarrow SAH = 60^\circ$

ΔABC vuông cân tại A có $AB = 2a \Rightarrow BC = 2a\sqrt{2}$. Mà H là trung điểm của BC

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$$

Xét tam giác vuông SHA ta có: $SH = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$

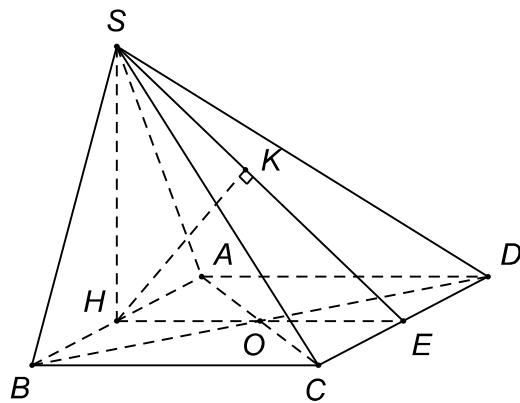
Vậy khoảng cách từ S đến đường thẳng BC là $a\sqrt{6}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ A đến (SCD) .

- A. $d = 1$. B. $d = \sqrt{2}$. C. $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $d = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AB , suy ra $SH \perp AB$. Do đó $SH \perp (ABCD)$.

Do $AH \parallel CD$ nên $d[A,(SCD)] = d[H,(SCD)]$.

Gọi E là trung điểm CD ; K là hình chiếu vuông góc của H trên SE .

$$\text{Khi đó } d[H,(SCD)] = HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

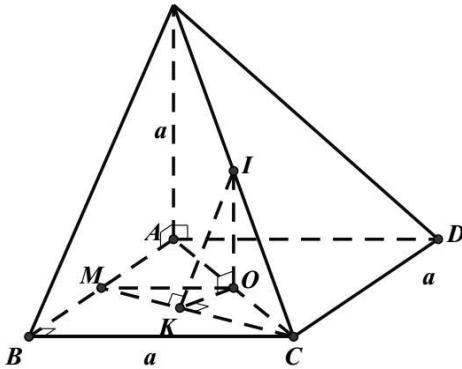
$$\text{Vậy } d[A,(SCD)] = HK = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O , $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của đoạn AB . Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{17}$. C. $\frac{a\sqrt{30}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Do $IO \perp (ABCD)$ nên nếu dựng $OK \perp CM (K \in CM)$ thì

$$\text{Tức là } d(I, CM) = IK \text{ mà } IK = \sqrt{OI^2 + OK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + OK^2}$$

$$\text{Do } S_{\Delta OMC} = \frac{1}{2} OK \cdot MC \Rightarrow OK = \frac{2S_{\Delta OMC}}{MC} = \frac{a}{\sqrt{5}}. \text{ Suy ra } IK = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE :

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

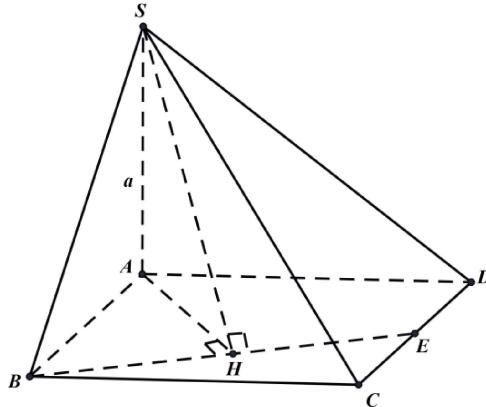
B. $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



$SA \perp (ABCD)$, trong mặt phẳng $(ABCD)$ nếu dựng $AH \perp BE$ tại H thì $SH \perp BE$ (định lý 3 đường vuông góc). Tức là khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE bằng đoạn SH .

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot FE = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} AH \cdot BE \text{ mà } BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a^2}{BE} = \frac{2a}{\sqrt{5}}, \text{ mà } \Delta SAH \text{ vuông tại } A, \text{ nên:}$$

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy } d(S, BE) = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

- Câu 6:** Cho hình chóp đùa $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và SC ; P là điểm trên cạnh SD sao cho $SP = 2PD$. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (MNP) .

A. $\frac{a\sqrt{34}}{34}$.

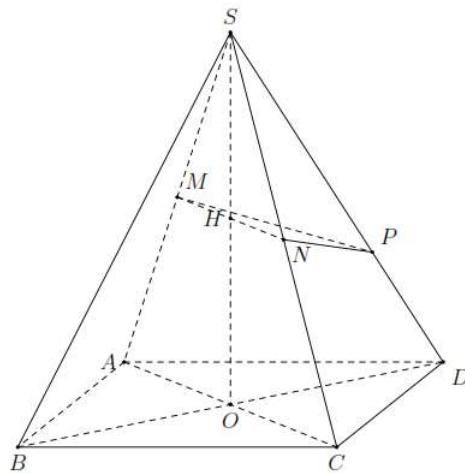
B. $\frac{a\sqrt{17}}{34}$.

C. $\frac{2a\sqrt{17}}{41}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } V_{D.MNP} = \frac{1}{2}V_{S.MNP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SP}{SD} V_{S.ACD} = \frac{1}{12} V_{S.ACD}.$$

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

$$\text{Suy ra } OA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } V_{S.ACD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\Delta SCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V_{D.MNP} = \frac{a^3\sqrt{2}}{144}.$$

$$\text{Do } MN \text{ là đường trung bình của tam giác } SAC \text{ nên } MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } SAD \text{ và } SCD \text{ đều cạnh } a \text{ nên } PM^2 = PN^2 = SM^2 + SP^2 - 2SM \cdot SP \cdot \cos 60^\circ = \frac{13a^2}{36}.$$

Do tam giác MNP cân tại P nên gọi H là trung điểm MN thì $PH \perp MN$.

$$\text{Suy ra } PH = \sqrt{PM^2 - \frac{MN^2}{4}} = \sqrt{\frac{13a^2}{36} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{34}}{12}.$$

$$\text{Vậy } d(D, (MNP)) = \frac{3V_{D.MNP}}{S_{MNP}} = \frac{\frac{3}{12} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{144}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{34}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{34}}{34}.$$

- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách từ điểm O đến SC .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

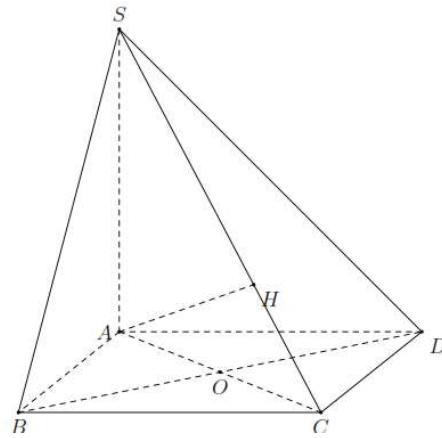
B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

Do O là tâm của hình vuông $ABCD$ nên $d(O, SC) = \frac{1}{2}d(A, SC)$.

Trong tam giác SAC vuông tại A hạ $AH \perp SC$.

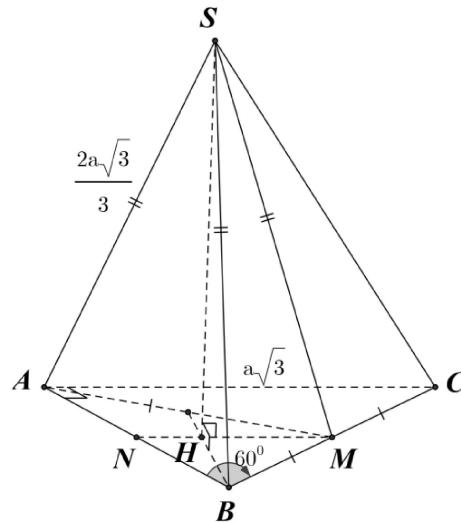
$$\text{Suy ra } d(A, SC) = AH = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(O, SC) = \frac{1}{2}d(A, SC) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a\sqrt{3}$, $ABC = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Biết $SA = SB = SM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh S đến (ABC)

- A. $d = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $d = a$. C. $d = 2a$. D. $d = a\sqrt{3}$.

Lời giải



Vì ΔABC vuông tại A , M là trung điểm của BC và $ABC = 60^\circ$ suy ra ΔABM đều.

$SA = SB = SM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Suy ra, hình chóp $S.ABM$ đều.

Xét ΔABC : $\sin 60^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow AM = AB = BM = a$.

Gọi H là trọng tâm ΔABC nên H là chân đường cao kẻ từ S xuống (ABC) .

$$\Delta ABC \text{ đều cạnh } a \text{ nên } MH = \frac{2}{3} MN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ (với } N \text{ là trung điểm } AB).$$

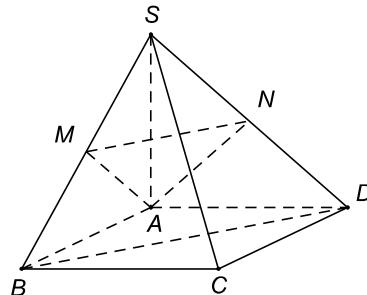
$$\text{Xét } \Delta SHM \text{ vuông tại } H: d(S, (ABC)) = SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a.$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD . Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN) .

- A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $d = 2a$. C. $d = \frac{3a}{2}$. D. $d = a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



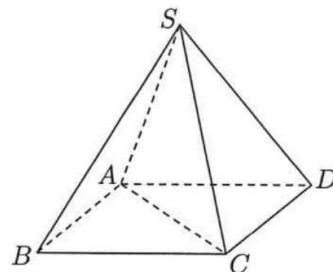
$$\text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABD} \cdot SA = \frac{2a^3}{3}.$$

$$\text{Vì } S_{\Delta SMN} = \frac{1}{4} S_{\Delta SBD} \text{ nên } V_{A.SMN} = \frac{1}{4} V_{A.SBD} = \frac{a^3}{6}.$$

Ta có AM, AN là các đường trung tuyến trong tam giác vuông, MN là đường trung bình nên tính được $AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}, AN = a\sqrt{2}, MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Từ đó tính được } S_{\Delta AMN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}. \text{ Vậy } d(S, (AMN)) = \frac{3V_{A.SMN}}{S_{\Delta AMN}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

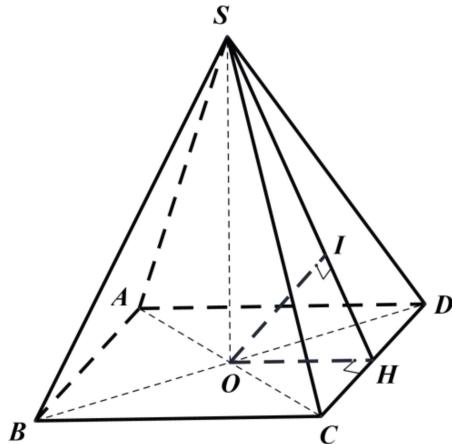
Câu 10: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ thể tích $V_{SABCD} = \frac{2a^3}{3}$, $AC = 2a$ (tham khảo hình bên). Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. B. $\sqrt{2}a$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$, H là trung điểm CD . Trong (SOH) , kẻ $OI \perp SH$.

$$\text{Có } \begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOH) \Rightarrow CD \perp OI.$$

Mà $OI \perp SH$ nên $OI \perp (SCD) \Rightarrow d(O, (SCD)) = OI$.

$$\text{Có } AD = AC \sin 45^\circ = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABCD} = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$$

$$\text{Ta có: } V_{SABCD} = \frac{2a^3}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot SO \cdot 2a^2 = \frac{2a^3}{3} \Leftrightarrow SO = a.$$

$$\text{Vì } O \text{ là trung điểm } AC \text{ nên } d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = 2OI = \frac{2SO \cdot OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}}.$$

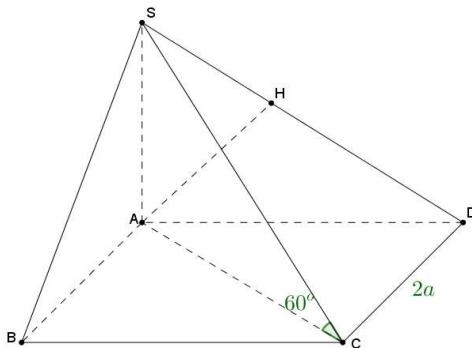
$$\text{Mà } AD = AC \sin 45^\circ = a\sqrt{2} \Rightarrow OH = a\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d(A, (SCD)) = \frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $(SC, (BCD)) = (SC, AC) = SCA = 60^\circ$.

Khi đó $AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{6}$.

Mà $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Kẻ $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$

$$\text{Khi đó } d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}}$$

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{2a\sqrt{2} \cdot 2a}{\sqrt{(2a\sqrt{2})^2 + (2a)^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a.$$

- Câu 12:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC . Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) theo a

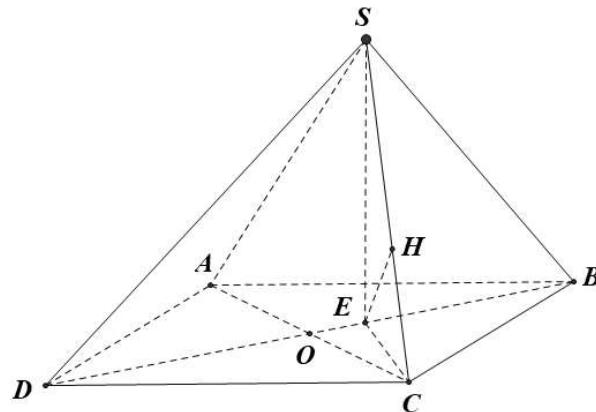
A. a .

B. $\frac{2a\sqrt{21}}{3}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải



Chọn D

Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$ và E là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\begin{cases} SD \cap (ABCD) = D \\ SE \perp (ABCD) \text{ ta}ii E \end{cases} \Rightarrow (SD, (ABCD)) = (SD, ED) = SDE = 30^\circ$$

Do tam giác ABC đều nên

$$\begin{cases} BD = 2BO = a\sqrt{3} \Rightarrow DE = \frac{2}{3}BD = a\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ CE = \frac{2}{3}BO = a\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Khi đó $\tan SDO = \frac{SE}{DE} \Rightarrow SE = \frac{2a}{3}$

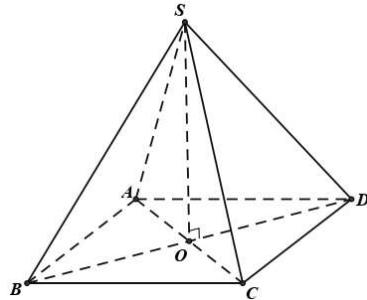
Vì tam giác ABC đều nên $CE \perp AB \Rightarrow CE \perp CD$ mà $CD \perp SE$ nên $CD \perp (SEC)$

Kẻ $EH \perp SC$ ($H \in SC$) khi đó $EH \perp (SCD)$ tại H nên $d(E, (SCD)) = EH$

$$\frac{1}{EH^2} = \frac{1}{SE^2} + \frac{1}{EC^2} = \frac{1}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \Rightarrow EH = a\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\text{Do } BE \cap (SCD) = D \text{ nên } \frac{d(B, (SCD))}{d(E, (SCD))} = \frac{BD}{ED} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{3}{2} d(E, (SCD)) = a \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

- Câu 13:** Cho hình chóp đùa $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng



- A. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. C. $a\sqrt{14}$. D. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $O = AC \cap DB$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đùa nên $SO \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông.

$$\text{Ta có: } \frac{d(A, (SCD))}{d(O, (SCD))} = \frac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)).$$

Tam giác ΔACD vuông tại D có: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OD = OC = a\sqrt{2}$.

Tam giác ΔSCO vuông tại O có: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = a\sqrt{7}$.

Do SO, OC, OD đồng một vuông góc nên gọi $h = d(O, (SCD))$ thì

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{8}{7a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

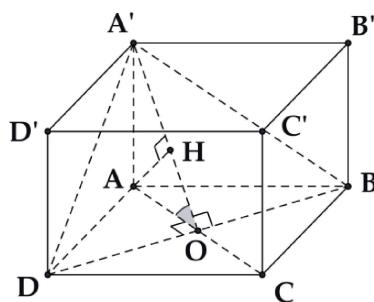
Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

- Câu 14:** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30° . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{13}}{13}$. B. $\frac{a}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{14}}{7}$. D. $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AOA') \Rightarrow A'O \perp BD$.

Khi đó $((A'BD), (ABCD)) = (A'O, AO) = A'OA = 30^\circ$.

Vẽ $AH \perp A'O$ tại H .

Ta có $BD \perp (AOA') \Rightarrow (A'BD) \perp (AOA')$.

Khi đó $\begin{cases} (AOA') \perp (A'BD) \\ (AOA') \cap (A'BD) = A'O \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A, (A'BD)) = AH \\ \text{Trong } (AOA'): AH \perp A'O \end{cases}$

$$AC = BD = 2a \Rightarrow AO = a, AH = AO \cdot \sin AOA' = a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(A, (A'BD)) = \frac{a}{2}.$$

Câu 15: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

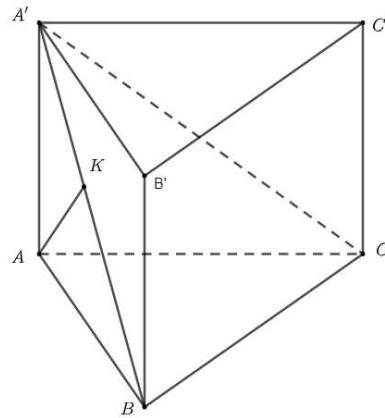
B. $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác ABA' dựng $AK \perp A'B$.

Do ABC là tam giác vuông tại B nên $BC \perp BA$,

Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ nên $A'A \perp BC$, do đó $BC \perp (ABA') \Rightarrow BC \perp AK$.

Từ đó suy ra $AK \perp (A'BC) \Rightarrow d(A, (A'BC)) = AK$.

$$\Delta A'AB : \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{A'A^2} \Rightarrow AK = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $AA' = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC . Gọi P, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, CC' và $A'G$. Khoảng cách từ N đến mặt phẳng (PQC) là

A. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

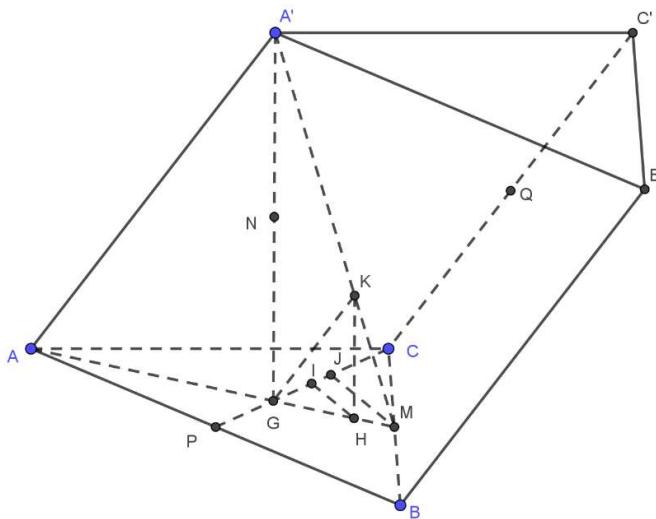
B. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{7}}{14}$.

D. $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC . Dựng $KG//AA'$ mà $CC'//AA'$ nên suy ra $d(N, (PKC)) = d(M, (PKC))$.

$$\frac{d(N, (PKC))}{d(A', (PKC))} = \frac{NG}{A'G} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Lại có } \frac{A'K}{MK} = \frac{AG}{GM} = 2 \Rightarrow \frac{d(A', (PKC))}{d(M, (PKC))} = \frac{A'K}{MK} = 2 \Rightarrow d(A', (PKC)) = 2d(M, (PKC)).$$

Dựng $A'G//KH$ mà $A'G \perp (ABC)$ nên $KH \perp (ABC)$.

$$\text{Ta có } \frac{d(M, (PKC))}{d(H, (PKC))} = \frac{MG}{HG} = \frac{A'M}{A'K} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(M, (PKC)) = \frac{3}{2}d(H, (PKC)).$$

$$\text{Vậy } d(N, (PKC)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}d(H, (PKC)) = \frac{3}{2}d(H, (PKC)).$$

Dựng $HI \perp PC$ và $MJ \perp PC$.

$$\text{Ta có } AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Có } A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{3} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Tam giác } A'GM \text{ có } A'G//KH \text{ nên } \frac{KH}{A'G} = \frac{MK}{MA'} \Rightarrow KH = A'G \cdot \frac{MK}{MA'} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{9}.$$

$$\text{Tam giác } MGC \text{ vuông tại } M \text{ và } MJ \perp MC \Rightarrow \frac{1}{MJ^2} = \frac{1}{MG^2} + \frac{1}{MC^2} \Rightarrow MJ = \frac{1}{4}a.$$

$$\text{Lại có } \frac{HI}{MJ} = \frac{HG}{MG} = \frac{2}{3} \Rightarrow HI = \frac{a}{6}.$$

$$\frac{1}{d(H, (PKC))^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{KH^2} \Rightarrow d(H, (PKC)) = \frac{a\sqrt{7}}{21}.$$

$$d(N, (PKC)) = \frac{3}{2} d(H, (PKC)) = \frac{a\sqrt{7}}{14}.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AB . Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{a}{3}$.

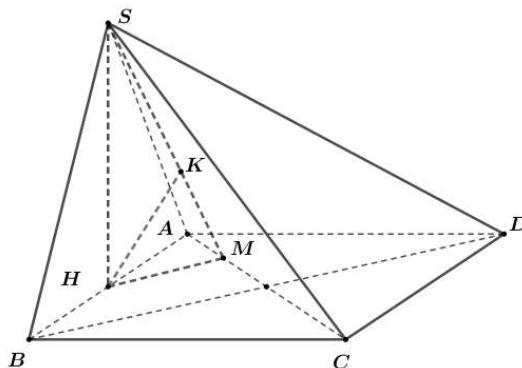
B. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Tam giác SAB vuông cân tại S , H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$

Từ H dựng $HM \perp AC$ tại M , từ H dựng $HK \perp SM$ tại K . Ta có

$\begin{cases} AC \perp HM \\ AC \perp SH \quad (SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHM) \Rightarrow AC \perp HK$.

Khi đó $\begin{cases} HK \perp SM \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC)$ tại K nên $d(H, (SAC)) = HK$.

Ta có $\begin{cases} SH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \\ HM = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \end{cases}$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SHM . Ta có

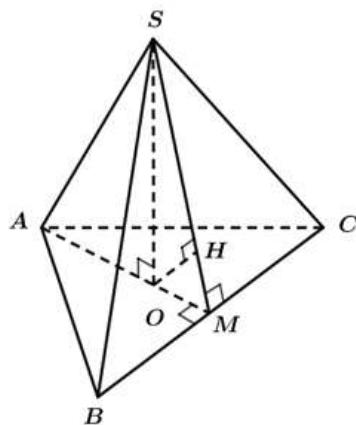
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $d(H, (SAC)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 18: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và $SA = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC)

- A. $\frac{\sqrt{13}}{13}a$. B. $\frac{2\sqrt{13}}{13}a$. C. $\frac{9\sqrt{13}}{13}a$. D. $\frac{3\sqrt{13}}{13}a$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC , O là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} OM \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SOM) \perp BC$$

Trong (SOM) kẻ $OH \perp SM$ ($H \in SM$) mà $OH \perp BC$ do $BC \perp (SOM)$
 $\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$.

$$\text{Ta có } AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a; OM = \frac{1}{2}AO = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông SAO

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = a$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SOM có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{SO \cdot OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}} = \frac{\sqrt{13}}{13}a$$

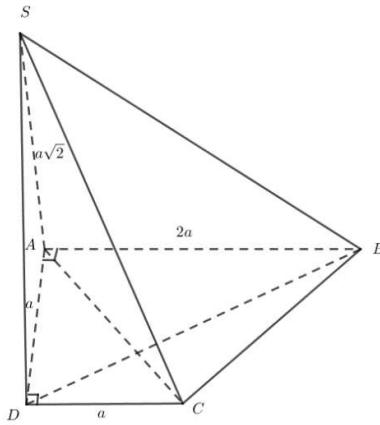
$$\text{Ta có } \frac{d(A, (SBC))}{d(O, (SBC))} = \frac{AM}{OM} = 3 \Rightarrow d(A, (SBC)) = 3 \cdot d(O, (SBC)) = 3 \cdot OH = \frac{3\sqrt{13}}{13}a.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = 2a$, $AD = DC = a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với $(ABCD)$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) bằng?

- A. $\frac{a(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5})}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABD} \Rightarrow V_{S.ABCD} = 3V_{SBCD} \Rightarrow d(C; (SBD)) = \frac{V_{S.ABCD}}{S_{\Delta SBD}}.$$

$$\text{Mà } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} a \sqrt{2} \frac{(a+2a)a}{2} = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$$

$$SD = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}; SB = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}; BD = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$$

$$\text{Suy ra, } \cos BSD = \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2.SB.SD} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \sin BSD = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

$$\text{Từ đó, } S_{\Delta SBD} = \frac{1}{2} SB.SD.\sin BSD = \frac{a^2 \sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(B; (SBD)) = \frac{\sqrt{2}a^3}{2} \cdot \frac{2}{a^2 \sqrt{14}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Câu 20: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $BAC = 60^\circ$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng

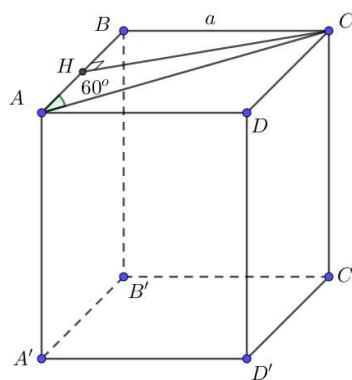
A. $2a$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. a .

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình thoi và $BAC = 60^\circ$ nên tam giác ABC là tam giác đều.

Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó $CH \perp AB$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABB'A').$$

Do đó $d(C; (ABB'A')) = CH$.

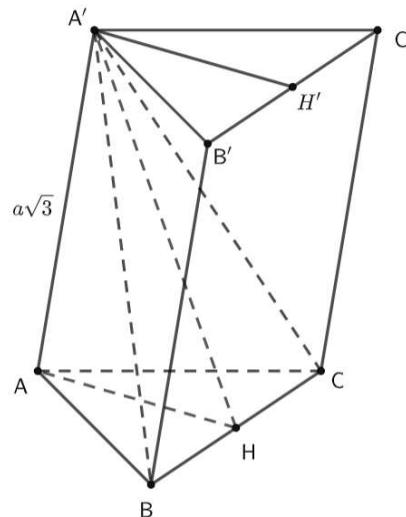
Vì ΔABC là tam giác đều nên $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân tại A . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm của cạnh BC . Biết cạnh $AA' = a\sqrt{3}$ và tạo với mặt đáy của hình lăng trụ một góc 60° . Khoảng cách từ đỉnh C' đến mặt $(A'BC)$ bằng

- A. $\frac{3a}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Vì $A'H \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng (ABC) . Khi đó góc giữa AA' và mặt phẳng (ABC) là góc giữa AA' và AH , hay chính là góc $A'AH$.

Vì $A'H \perp (ABC)$ nên $A'H \perp AH$ hay tam giác $AA'H$ vuông tại H .

Khi đó $\cos A'AH = \frac{AH}{AA'} \Rightarrow AH = AA' \cdot \cos A'AH = a\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H' là trung điểm của cạnh $B'C'$.

Tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại A' nên $A'H' \perp B'C'$.

$A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp (A'B'C') \Rightarrow A'H \perp A'H'$.

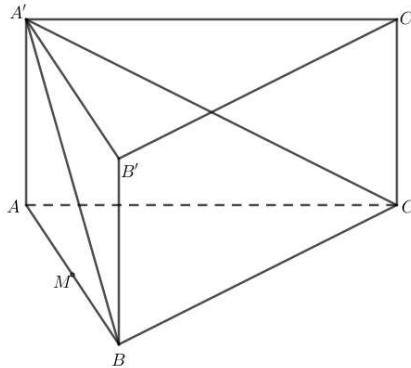
Ta có $\begin{cases} A'H' \perp B'C' \\ A'H' \perp A'H \\ A'H \cap BC = \{H\} \\ A'H, BC \subset (A'BC) \end{cases} \Rightarrow A'H' \perp (A'BC)$.

Vì $BC \parallel B'C'$, $BC \subset (A'BC)$ nên $B'C' \parallel (A'BC)$.

Suy ra $d(C'; (A'BC)) = d(B'C'; (A'BC)) = d(H'; (A'BC)) = A'H' = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 22: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $4a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và

(ABC) bằng 30° . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$?



A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

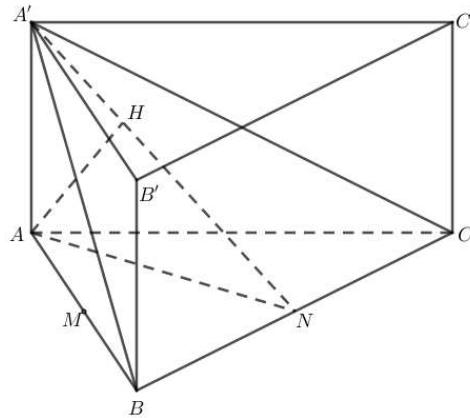
B. $3a$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của BC .

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $BC \perp AN, AA'$ và $AN = 2a\sqrt{3}$. Suy ra $BC \perp (A'AN)$. Từ đó ta có: $\left((A'BC), (ABC) \right) = A'NA = 30^\circ$.

Gọi H là hình chiếu của A trên $A'N$, do $BC \perp (A'AN)$ nên: $AH \perp AN, BC \Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A, (A'BC)) = AH$.

Xét tam giác AHN vuông tại H có: $AH = AN \sin ANA' = a\sqrt{3}$. Suy ra $d(A, (A'BC)) = a\sqrt{3}$.

Mặt khác, M là trung điểm của cạnh AB nên $d(M, (A'BC)) = \frac{1}{2}d(A, (A'BC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết khoảng cách từ điểm O đến các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt là $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) theo a

A. $2a$.

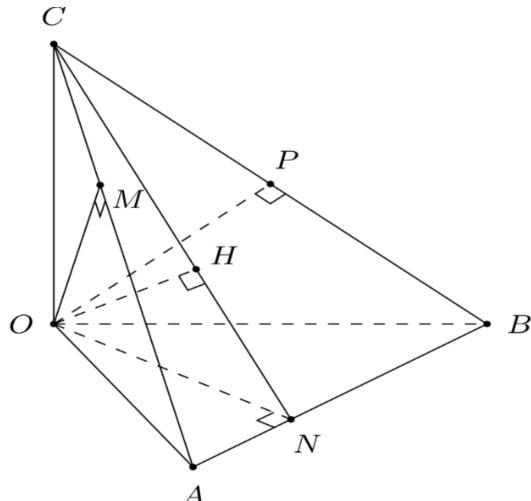
B. $\frac{a\sqrt{66}}{11}$.

C. $\frac{11a}{6}$.

D. $\frac{2a\sqrt{33}}{11}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $OM \perp AC$ ($M \in AC$), $ON \perp AB$ ($N \in AB$), $OP \perp BC$ ($P \in BC$).

Khi đó ta có $OP = a$, $OM = a\sqrt{2}$, $ON = a\sqrt{3}$.

Trong (OCN) kẻ $OH \perp CN$ ($H \in CN$) ta có:

$$\begin{cases} AB \perp ON \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCN) \Rightarrow AB \perp OH$$

$$\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp CN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow d(O, (ABC)) = OH$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Lại có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{OM^2} &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OC^2}; \quad \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}; \quad \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} &= 2 \left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{11}{12a^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{OH^2} &= \frac{11}{12a^2} \Rightarrow OH = \frac{2a\sqrt{33}}{11} \end{aligned}$$

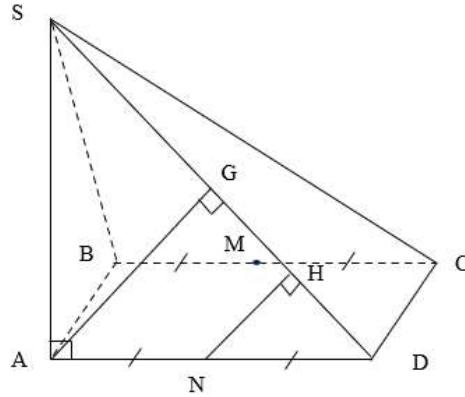
$$\text{Vậy } d(O, (ABC)) = \frac{2a\sqrt{33}}{11}$$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60° , M là trung điểm của BC . Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $a^3 \frac{\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCD) là

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm của cạnh AD .

Gọi cạnh hình vuông $ABCD$ có độ dài là x , ($x > 0$).

Ta có: $MN \parallel CD \Rightarrow d(M;(SCD)) = d(N;(SCD))$.

$$\text{Ké } NH \perp SD, AG \perp SD \Rightarrow d(M;(SCD)) = d(N;(SCD)) = NH = \frac{1}{2}AG.$$

Do SA vuông góc với $(ABCD)$ nên góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy là góc $SDA = 60^\circ$.

$$\Rightarrow \tan SDA = \frac{SA}{AD} \Rightarrow SA = AD \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot x\sqrt{3} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = a.$$

Xét ΔSAD :

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 2a$, $AC = a$, $SBA = SCA = 90^\circ$, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC) .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

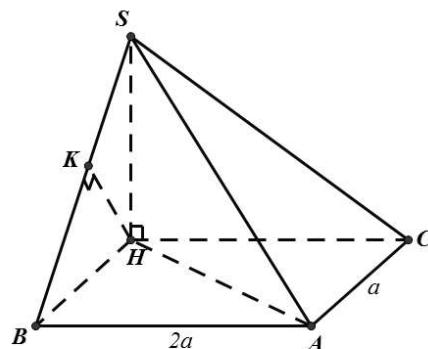
B. $\frac{a\sqrt{30}}{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{30}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC) .

$$\begin{cases} AB \perp SH \\ AB \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHB) \Rightarrow AB \perp HB \text{ mà } AB \perp AC \text{ nên suy ra } HB // AC(1)$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AC \perp SH \\ AC \perp SC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHC) \Rightarrow AC \perp HC \text{ mà } AC \perp AB \text{ nên suy ra } HC // AB(2)$$

Từ (1),(2) suy ra $ABHC$ là hình bình hành mà $A = 90^\circ$ nên $ABHC$ là hình chữ nhật.

và $\angle(SA, (ABC)) = \angle SAH = 45^\circ, SH = AH = a\sqrt{5}$.

$$HC // (SAB) \Rightarrow d_{(C;(SAB))} = d_{(H;(SAB))}$$

Gọi K là hình chiếu của H lên SB . Kẻ $HK \perp SB$

$$\text{Mà } AB \perp (SHB) \Rightarrow AB \perp HK$$

Suy ra $HK \perp (SAB)$.

$$d_{(C;(SAB))} = d_{(H;(SAB))} = HK.$$

$$\Delta SHB \text{ vuông tại } H. \text{ Ta có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{1}{5a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{6}{5a^2}.$$

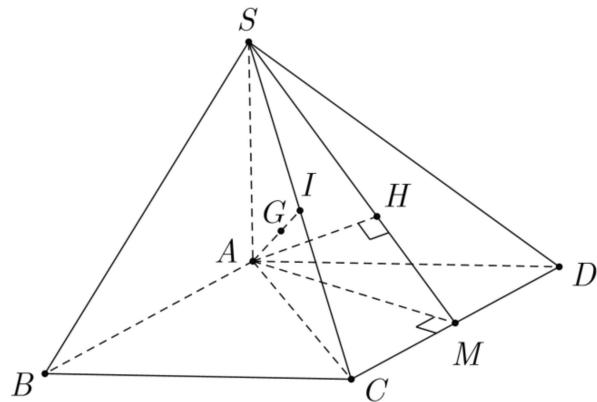
$$\text{Vậy } HK = \frac{a\sqrt{30}}{6}.$$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $ADC = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \sqrt{6}a$, G là trọng tâm tam giác SAC . Khoảng cách từ G đến (SCD) là

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, I lần lượt là trung điểm CD, SC .

Theo giả thiết ta có tam giác ACD đều. Suy ra $AM = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$.

Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) thì $AH \perp (SCD)$.

Ta có $GI = \frac{1}{3}AI$ nên $d(G, (SCD)) = \frac{1}{3}d(A, (SCD)) = \frac{1}{3}AH$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{AM \cdot SA}{\sqrt{AM^2 + SA^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a \cdot \sqrt{6}a}{\sqrt{3a^2 + 6a^2}} = \frac{\sqrt{2}a}{3}$$

Vậy $d(G, (SCD)) = \frac{\sqrt{2}a}{3}$.

Câu 27: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Gọi M là trung điểm AD , tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBD) biết $SO = \frac{\sqrt{95}}{10}a$.

A. $\frac{\sqrt{95}}{5}a$.

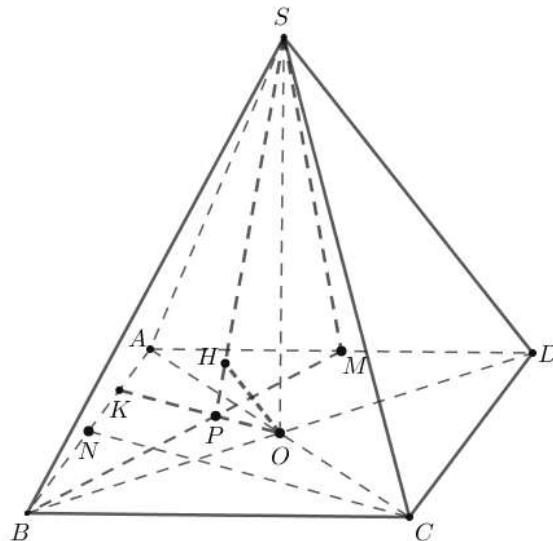
B. $\frac{\sqrt{95}}{100}a$.

C. $\frac{\sqrt{19}}{5}a$.

D. $\frac{\sqrt{19}}{10}a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm cạnh AB suy ra $CN \perp BM$. Dựng đường thẳng qua O , song song với CN cắt BM tại P và AN tại K , suy ra $OP \perp BM$ (1).

Từ giả thiết suy ra $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BM$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $d(O, (SBM)) = d(O, SP) = OH$ (H là hình chiếu vuông góc của O lên SP)

Hai tam giác $\Delta BPK, \Delta MPO$ đồng dạng cho ta $\frac{PO}{PK} = \frac{OM}{KB} = \frac{2}{3}$

OK là đường trung bình của ΔACN nên $OK = \frac{CN}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}a \Rightarrow OP = \frac{2}{5}OK = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}a = \frac{\sqrt{5}}{10}a$.

Vậy $d(D, (SBM)) = 2d(O, (SBM)) = 2OH = \frac{2SO \cdot OP}{\sqrt{SO^2 + OP^2}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{95}}{10}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{10}a}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{95}}{10}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{10}a\right)^2}} = \frac{\sqrt{19}}{10}a$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có chiều cao $AB = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD . Khoảng cách giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAD) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

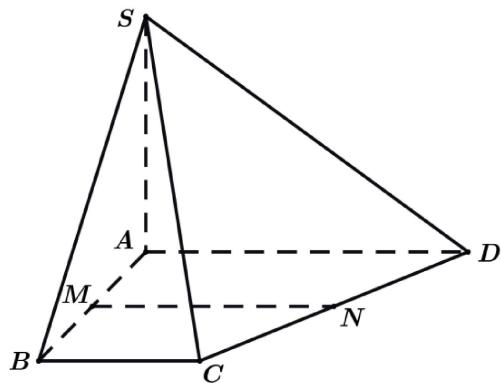
B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Vì } \begin{cases} MN \parallel AD \\ MN \not\subset (\text{SAD}) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (\text{SAD})$$

$$\Rightarrow d(MN, (\text{SAD})) = d(M, (\text{SAD}))$$

$$\text{Vì } \begin{cases} MA \perp AD \\ MA \perp SA \end{cases} \Rightarrow MA \perp (\text{SAD}) \Rightarrow d(M, (\text{SAD})) = MA$$

$$\text{Vậy } d(MN, (\text{SAD})) = d(M, (\text{SAD})) = MA = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

- Câu 29:** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang cân có góc ở đáy bằng 60° . $AB = 2CD = 2a$, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc 45° . Hình chiếu vuông góc của S lên đáy trùng với giao điểm của AC và BD . Tính Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

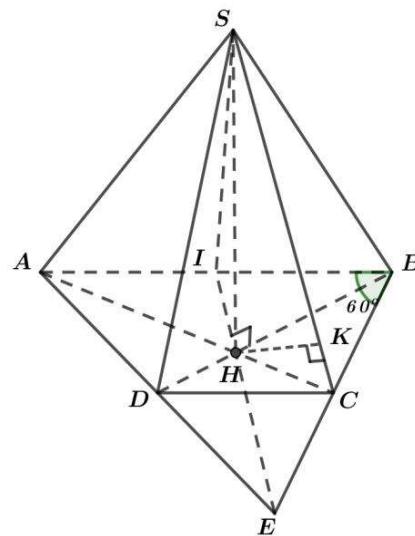
B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E , lấy I là trung điểm AB . Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên đáy, kẻ HK vuông góc với SC tại K .

Xét tam giác ABE có $ABE = BAE = 60^\circ$ nên ABE là tam giác đều và H là trực tâm

$$\Rightarrow \begin{cases} AC \perp BC \\ HI \perp AB \\ HI = HC = \frac{1}{3} EI = \frac{1}{3} 2a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Delta SHA = \Delta SHB \Rightarrow SA = SB \Rightarrow SI \perp AB \Rightarrow ((SAB), (ABCD)) = SIH = 45^\circ$$

$$\Rightarrow SH = IH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Ta có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp HK$, ta lại có $\begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp BC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$

$$\text{Suy ra khoảng cách từ } H \text{ đến } (SBC) \text{ là } HK = \frac{HS \cdot HC}{\sqrt{HS^2 + HC^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Tam giác HAB đồng dạng với tam giác HCD và $AB = 2CD$ nên $\frac{AH}{HC} = \frac{AB}{CD} = 2$

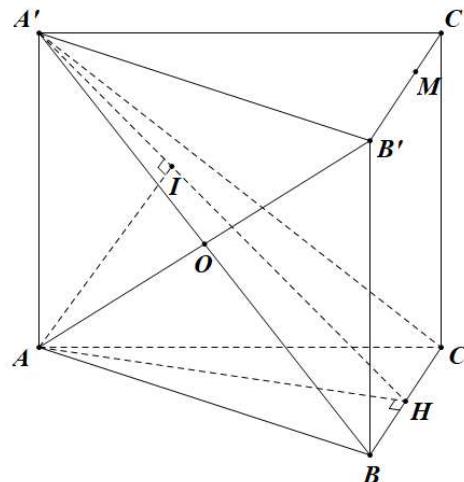
Vậy khoảng cách từ A đến (SBC) bằng 3 lần khoảng cách từ H đến (SBC) $= \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 30: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 45° , M là điểm tùy ý thuộc cạnh $B'C'$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên là lăng trụ đứng có đáy ABC là tam giác đều.

Ta có $B'C' \parallel (A'BC)$ nên $d(M, (A'BC)) = d(B', (A'BC))$.

Mà $AB' \cap (A'BC) = O$ với O là trung điểm AB' nên $d(B', (A'BC)) = d(A, (A'BC))$.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC , I là hình chiếu của A lên $A'H$, ta chứng minh được $AI \perp (A'BC)$, suy ra $d(A, (A'BC)) = AI$.

Mà $(A'BC), (ABC) = A'HA = 45^\circ$ nên tam giác $A'AH$ vuông cân tại A , do đó

$$A'H = AH\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Mặt khác, AI là đường cao của tam giác $A'AH$ nên $AI = \frac{A'H}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 31: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng $2a$, $B'D = 3a$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

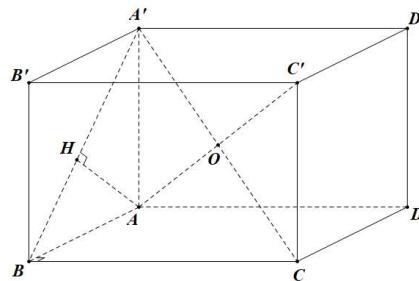
B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{5}$.

D. $a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều nên là lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh $2a$, suy ra $BD = 2a\sqrt{2}$.

Mà $B'D = 3a \Rightarrow B'B = \sqrt{B'D^2 - BD^2} = \sqrt{9a^2 - 8a^2} = a$.

Ta có $AC' \cap (A'BC) = O$ (với O là trung điểm của AC').

Suy ra $d(C', (A'BC)) = d(A, (A'BC))$.

Gọi H là hình chiếu của A lên $A'B$, ta chứng minh được $AH \perp (A'BC)$.

Suy ra $AH = d(A, (A'BC))$.

Tam giác $A'AB$ vuông tại A và có AH là đường cao nên

$$AH = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh $4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của FG, GH .

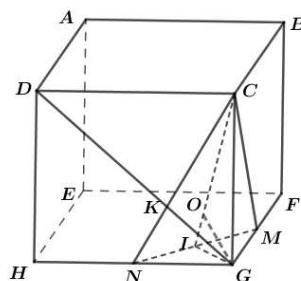
Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (CMN) bằng

A. $\frac{3}{4}a$.

B. $\frac{a}{3}$.

C. $\frac{4}{3}a$.

D. $\frac{2}{3}a$.



Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng $(CDHG)$ gọi $K = CN \cap DG$ suy ra $K \in DG, K \in (CMN)$ (1).

Dễ thấy hai tam giác ΔKCD và ΔKNG đồng dạng $\Rightarrow \frac{DK}{GK} = \frac{CD}{NG} = 2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $d(D, (CMN)) = 2d(G, (CMN))$.

Gọi I là trung điểm $MN \Rightarrow GI \perp MN \Rightarrow MN \perp (ICG)$.

Ngoài ra ta còn có $\begin{cases} (ICG) \cap (CMN) = IC \\ MN \subset (CMN) \end{cases} \Rightarrow (ICG) \perp (CMN)$

Trong mặt phẳng (ICG) gọi O là hình chiếu vuông góc của G trên $IC \Rightarrow d(G, (CMN)) = GO$

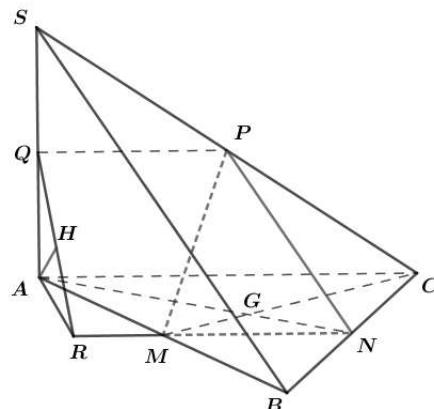
Hình chóp $G.MNC$ có các cặp cạnh GM, GN, GC đối nhau vuông góc nên ta có:

$$\frac{1}{GO^2} = \frac{1}{GM^2} + \frac{1}{GN^2} + \frac{1}{GC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow GO = \frac{2}{3}a$$

$$\text{Vậy } d(D, (CMN)) = 2d(G, (CMN)) = \frac{4}{3}a.$$

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, trọng tâm G , $SA = 2a, AB = 4\sqrt{3}a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CS . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (MNP) bằng

- A. $\frac{3a\sqrt{10}}{20}$. B. $\frac{a\sqrt{10}}{10}$. C. $\frac{3a\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{20}$.



Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng (ABC) đường thẳng qua A và vuông góc với MN cắt MN tại R .

Gọi Q là trung điểm của $SA \Rightarrow PQ$ song song với $MN \Rightarrow Q \in (MNP)$

Ta chứng minh được $MN \perp (RAQ) \Rightarrow (PMN) \perp (RAQ)$.

Trong mặt phẳng (RAQ) gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên RQ thì $AH = d(A, (MNP))$

Do $A \in AC, R \in MN$ mà MN song song với AC nên

$$AR = d(MN, AC) = \frac{1}{2}d(B, AC) = \frac{4\sqrt{3}a\sqrt{3}}{4} = 3a$$

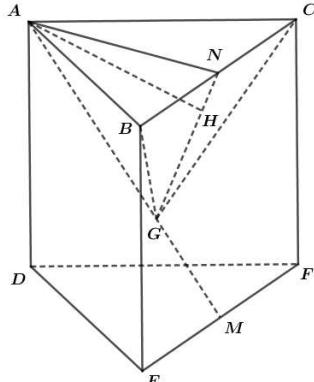
Xét tam giác RAQ vuông tại A , đường cao AH có:

$$AH = \frac{AQ \cdot AR}{\sqrt{AQ^2 + AR^2}} = \frac{a \cdot 3a}{\sqrt{a^2 + (3a)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}a.$$

$$\text{Vậy } d(G, (MNP)) = \frac{1}{3}d(A, (MNP)) = \frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Câu 34: Cho hình lăng trụ đứng $ABCDEF$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm của tam giác AEF . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (GBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{19}}{19}a$. B. $\frac{\sqrt{57}}{19}a$. C. $\frac{2\sqrt{57}}{19}a$. D. $\frac{2\sqrt{19}}{19}a$.



Lời giải

Chọn C

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, BC . Hai mặt phẳng (AGN) và (GBC) có:

$$\Rightarrow \begin{cases} (AGN) \cap (GBC) = GN \\ BC \subset (GBC), BC \perp AN, BC \perp GN \Rightarrow (AGN) \perp (GBC) \\ AN, GN \subset (AGN), AN \cap GN = N \end{cases}$$

Trong mp (AGN) , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên GN suy ra $d(A, (GBC)) = AH$.

$$AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2},$$

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}, \cos GAN = \frac{AN}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$GN = \sqrt{AG^2 + AN^2 - 2AG \cdot AN \cdot \cos GAN} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{7}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{7}} = \frac{\sqrt{19}}{6}a$$

$$S_{AGN} = \frac{2}{3}S_{AMN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2$$

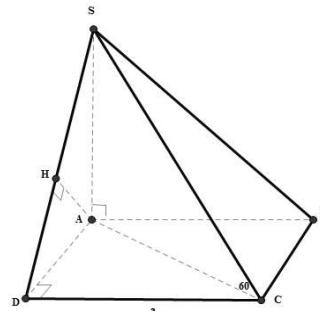
$$\text{Vậy } d(A, (GBC)) = AH = \frac{2S_{AGN}}{GN} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}a^2}{\frac{\sqrt{19}}{6}a} = \frac{2\sqrt{57}}{19}a.$$

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách h từ AB đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. B. $a\sqrt{2}$. C. a . D. $\frac{a\sqrt{42}}{7}$.

Lời giải

Chon D



Vi $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ theo giao tuyén SD , dụng

$AH \perp SD$, mà $AH \in (SAD) \Rightarrow AH \perp (SCD)$

Ta có $AB \parallel (SCD)$ nên $h = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH$

Theo đề bài, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° nên $SCA = 60^\circ$.

$$\text{Ta có: } \tan 60^\circ = \frac{SA}{AC} \Rightarrow SA = a\sqrt{6}$$

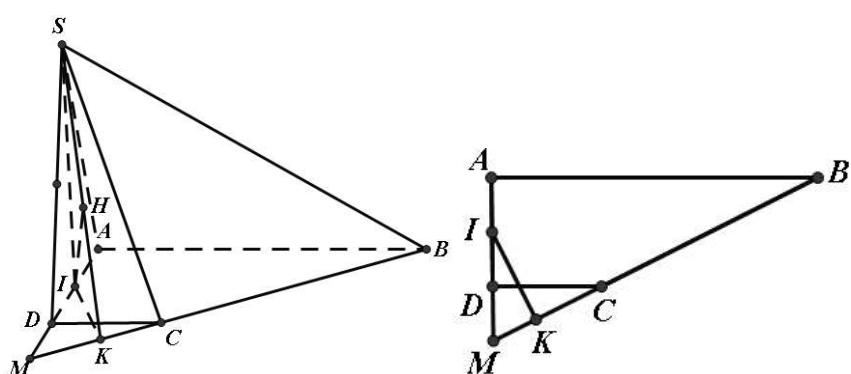
$$\text{Và } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 3a$, $AD = DC = a$. Gọi I là trung điểm của AD , biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính theo a khoảng cách từ trung điểm cạnh SD đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $\frac{a\sqrt{17}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{19}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải

Chon D



Ké $IK \perp BC$ ($K \in BC$) $\Rightarrow ((SBC);(ABCD)) = SKI = 60^\circ$

Gọi $M = AD \cap BC$. Ta có $\frac{MD}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MD = \frac{a}{2}$

Ta có ΔMIK đồng dạng với ΔMBA nên suy ra $\frac{IK}{BA} = \frac{MI}{MB} = \frac{a}{\sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$

$$\Rightarrow IK = \frac{2\sqrt{5}}{15} \cdot 3a = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Gọi N là trung điểm của SD .

Ta có $d(N, (SBC)) = \frac{1}{2}d(D, (SBC)) = \frac{1}{4}d(I, (SBC))$

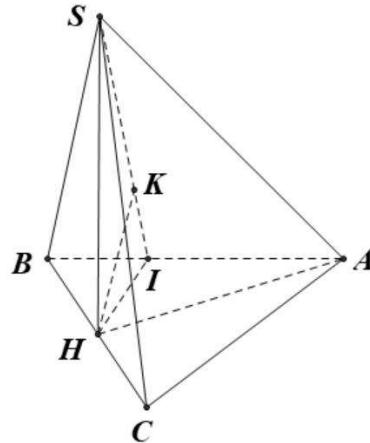
Từ I kề $IH \perp SK$ suy ra $IH = d(I, (SBC)) = IK \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{5} \Rightarrow d(N, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{20}$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$, mặt bên SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $ASB = ASC = 60^\circ$, $SB = 1$. Biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{a}}{b}$ (a, b là hai số nguyên dương nhỏ hơn 10), tính $2a + b$.

- A. $2a + b = 18$. B. $2a + b = 15$. C. $2a + b = 8$. D. $2a + b = 12$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC suy ra $SH \perp (ABC)$.

Ta có $d(C; (SAB)) = 2d(H; (SAB))$.

Ké $HI \perp AB; HK \perp SI$ suy ra $d(H; (SAB)) = HK$.

Vì ΔSBC đều, $SB = 1$ suy ra $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đặt $SA = x \Rightarrow AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2 \cdot SA \cdot SB \cdot \cos ASB} = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Ta lại có $\Delta ASB = \Delta ASC \Rightarrow AB = AC \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{x^2 - x + \frac{3}{4}}$.

Mà tam giác SHA vuông tại H nên $SA^2 = SH^2 + HA^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} + x^2 - x + \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Suy ra $AB = \frac{\sqrt{7}}{2}$; $AH = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow HI = \frac{BH \cdot AH}{AB} = \frac{\sqrt{42}}{14}$.

Từ đó ta có $HK = \frac{SH \cdot HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Suy ra $d(C; (SAB)) = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow a = 6; b = 3 \Rightarrow 2a + b = 15$.

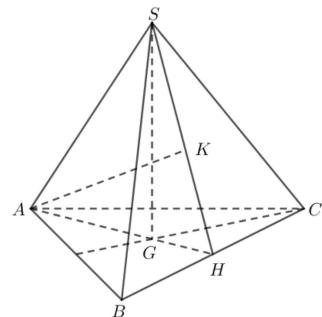
Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và đỉnh S cách đều các điểm A, B, C . Biết

$SA = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$, tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{13}}{13}a$. B. $\frac{3\sqrt{13}}{13}a$. C. $\frac{9\sqrt{13}}{13}a$. D. $\frac{2\sqrt{13}}{13}a$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC và G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SG \perp (\Delta ABC)$ và $AH \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SG \\ BC \perp AH \Rightarrow BC \perp (SAH) \\ SG \cap AH = G \end{cases}$.

Trong (SAH) , kẻ $AK \perp SH \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AK$.

Lại có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $GH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

ΔSAG vuông tại G có: $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a$.

ΔSGH vuông tại G có: $SH = \sqrt{SG^2 + GH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$.

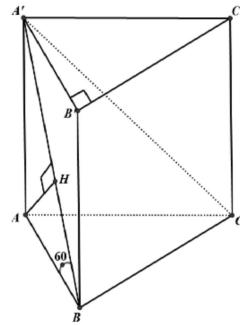
Ta có: $AK \cdot SH = SG \cdot AH \Rightarrow AK = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{39}}{6}}{\frac{a\sqrt{39}}{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}a$.

Câu 39: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , Góc giữa cạnh $A'B$ và mặt đáy là 60° . Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

- A. $\frac{a\sqrt{15}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn A



Góc giữa cạnh $A'B$ và mặt đáy là $A'BA$ bằng 60° . Suy ra $AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{15}$

Kẻ AH vuông góc với $A'B$ ta chứng minh được AH là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

$$\text{Tam giác } A'AB \text{ vuông tại } A \text{ nên } AH = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{15} \cdot a\sqrt{5}}{\sqrt{20a^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

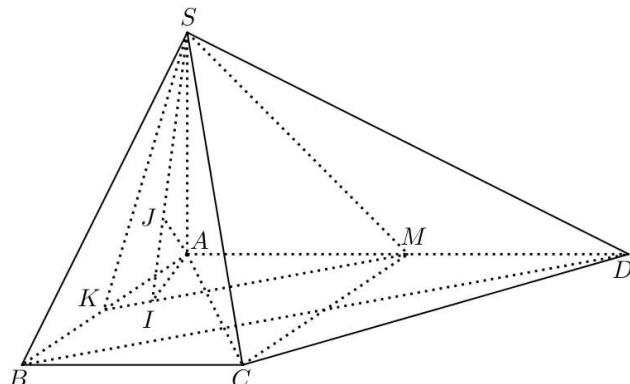
Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B ; $AB = BC = a$; $AD = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Gọi M là trung điểm của cạnh AD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD là:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{11}$. B. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. C. $\frac{a\sqrt{11}}{22}$. D. $\frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $(SC, (ABCD)) = SCA = 45^\circ \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$

Gọi K là trung điểm của AB , khi đó AB song song với (SMK) .

Do đó $d(BD, SM) = d(BD, (SMK)) = d(B, (SMK)) = d(A, (SMK))$.

Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MK và SI .

Khi đó $MK \perp AI, MK \perp SA \Rightarrow MK \perp AJ$. Do $AJ \perp MK$ và $AJ \perp SI$ nên $AJ \perp (SMK)$ hay $d(A, (AMK)) = AJ$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{11}{2a^2} \Rightarrow AJ = \frac{a\sqrt{22}}{11}$$

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy (ABC) thỏa mãn $AB = a, AC = 2a, BAC = 120^\circ$; SA vuông góc

với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của BC , tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

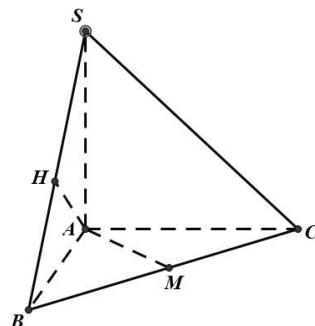
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC = 7a^2 \Rightarrow BM^2 = \frac{7a^2}{4}$$

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{3a^2}{4}; AB^2 + AM^2 = BM^2 \Rightarrow \triangle ABM \text{ vuông tại A}$$

Ta có $\begin{cases} AM \perp AB \\ AM \perp SA \Rightarrow AM \perp (SAB) \end{cases}$. Trong mp(SAB), kẻ $AH \perp SB$, vậy AH là đoạn vuông góc chung của AM và SB . Do $\triangle SAB$ vuông cân đỉnh S nên $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm SD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM .

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

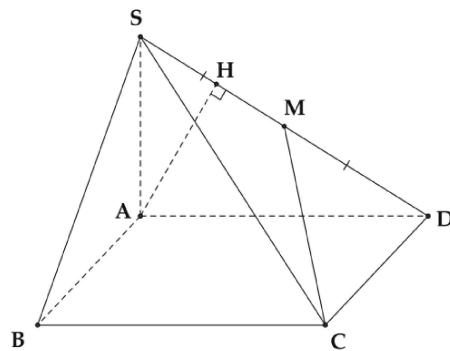
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$.

Khi đó $d(AB, CM) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD) \end{cases}$.

Trong mặt phẳng (SAD) vẽ $AH \perp SD$ tại H .

Khi đó $\begin{cases} (SAD) \perp (SCD) \\ (SAD) \cap (SCD) = SD \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = AH \\ \text{Trong } (SAD): AH \perp SD \end{cases}$

Ta có $AH = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

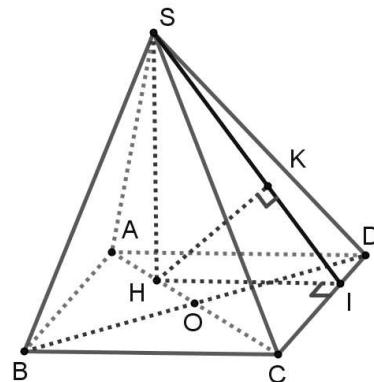
Vậy $d(AB, CM) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn AO . Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB .

- A. $d = 4a$. B. $d = 2a$. C. $d = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. D. $d = \frac{4a\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là hình chiếu của H trên $CD \Rightarrow HI \perp CD$. Gọi K là hình chiếu của H trên $SI \Rightarrow HK \perp SI$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH (SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp HK$.

Ta có $\begin{cases} HK \perp CD \\ HK \perp SI \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow d(H; (SCD)) = HK$.

Ta có $HI = \frac{3}{4}AD = 3a$; $AC = 4\sqrt{2}a \Rightarrow AH = \sqrt{2}a$.

Xét ΔSHA có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$.

Xét ΔSHI có $HK = \frac{HI \cdot SH}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{3}{2}a$.

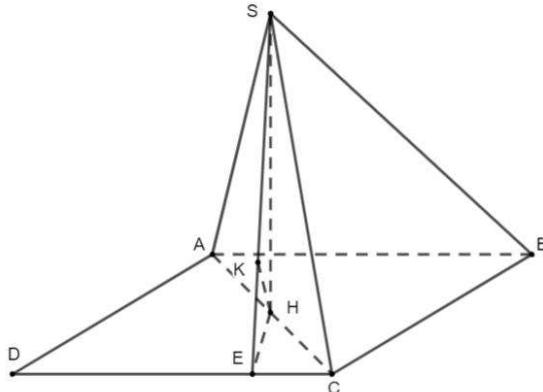
Ta có $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB; (SCD)) = d(A; (SCD)) = \frac{4}{3}d(H; (SCD)) = \frac{4}{3}HK = 2a$.

Câu 44: Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa SC và AB .

- A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $d = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$. D. $d = \frac{2a\sqrt{30}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Do $(SAC) \perp (ABCD)$, $SH \perp AC$ (H là trung điểm của AC) thì $SH \perp (ABCD)$.

Ké $CD \parallel AB$, ($CD = AB$), ta có $d(SC, AB) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(H, (SCD))$.

Ké $HE \perp DC$, mà $SH \perp DC \Rightarrow DC \perp (SHE)$, ké $HK \perp SE$, $HK \perp DC$ ($DC \perp (SHE)$) suy ra $HK \perp (SCD)$ hay $d(H, (SCD)) = HK$.

Ta có tam giác SAC vuông cân tại S nên $SH = \frac{1}{2}AC = a$, $HE = HC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó

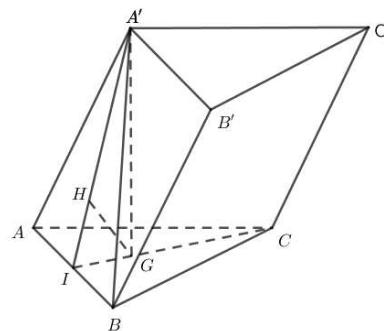
$$HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}a \text{ suy ra } d(SC, AB) = \frac{2\sqrt{21}}{7}a.$$

Câu 45: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC và diện tích tam giác $A'AB$ bằng $\frac{a^2}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và AB' .

- A. $2\sqrt{2}a$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn mặt phẳng $(AA'B'A)$ chứa AB' và song song với CC' .

Khi đó $d(AB', CC') = d(CC', (AA'B'B)) = d(C, (AA'B'B))$.

Gọi I là trung điểm của AB . Vì tam giác ABC đều nên $CI \perp AB \Rightarrow GI \perp AB$.

Vì $\begin{cases} A'G \perp AB \\ GI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'GI) \Rightarrow AB \perp A'I$.

$$GI = \frac{1}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Vì diện tích tam giác $A'AB$ bằng $\frac{a^2}{4}$ nên $\frac{1}{2}A'I \cdot AB = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow A'I = \frac{a}{2}$.

$$\text{Suy ra } A'G = \sqrt{A'I^2 - GI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Trong mặt phẳng $(A'GI)$ kẻ $GH \perp A'I$ ($H \in A'I$).

Khi đó $\begin{cases} GH \perp A'I \\ GH \perp AB \quad (AB \perp (A'GI)) \end{cases}$ suy ra $GH \perp (AA'B'B) \Rightarrow d(G, (AA'B'B)) = GH$.

Xét tam giác $\Delta A'GI$ vuông tại G có

$$GH \cdot A'I = A'G \cdot GI \Rightarrow d(G, (AA'B'B)) = GH = \frac{A'G \cdot GI}{A'I} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Ta lại có $d(C, (AA'B'B)) = \frac{CI}{GI} = 3 \Rightarrow d(C, (AA'B'B)) = 3 \cdot d(G, (AA'B'B)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

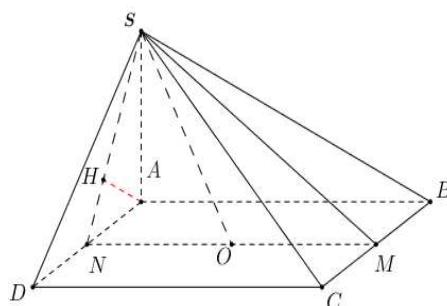
$$\text{Vậy } d(AB', CC') = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $SBD = 60^\circ$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . Dựng $AH \perp SN$

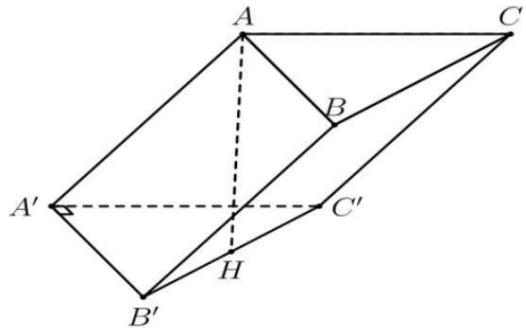
Khi đó $d(AB; SO) = d(AB, (SMN)) = d(A, (SMN)) = AH$

Do tam giác SBD có $SBD = 60^\circ$ và $SB = SD$ nên SBD là tam giác đều

Suy ra $SD = BD = a\sqrt{2}$, do đó $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{5}}{5} = d(AB, SO)$.

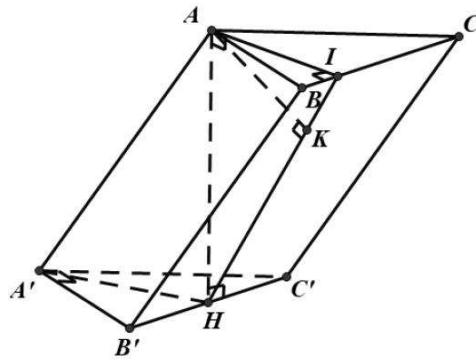
- Câu 47:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của đoạn $B'C'$ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng



- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AI \perp BC$, $AK \perp HI$.

Do $AH \perp (A'B'C') \Rightarrow AH \perp B'C' \Rightarrow AH \perp BC$ mà $AI \perp BC$ nên $BC \perp (AHI) \Rightarrow BC \perp AK$.

Vì $AK \perp BC$, $AK \perp HI \Rightarrow AK \perp (BB'C'C)$.

Vì $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BB'C'C) \Rightarrow d(AA', BC') = d(AA', (BB'C'C)) = d(A, (BB'C'C)) = AK$.

Xét tam giác ABC có đường cao AI nên

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3}a}{2}; BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a.$$

Xét tam giác $A'B'C'$ có đường trung tuyến AH nên $A'H = \frac{1}{2}B'C' = \frac{1}{2}BC = a$.

Xét tam giác $AA'H$ vuông tại H (do $AH \perp (A'B'C') \Rightarrow AH \perp A'H$) nên

$$AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a.$$

Xét tam giác AHI vuông tại A (do $AH \perp (A'B'C') \Rightarrow AH \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp AI$) có đường cao AK

$$\text{nên } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{15}a}{5} \Rightarrow d(AA', BC') = \frac{\sqrt{15}a}{5}.$$

- Câu 48:** Cho hình chóp tú giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của CD , tính

khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SC theo a .

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

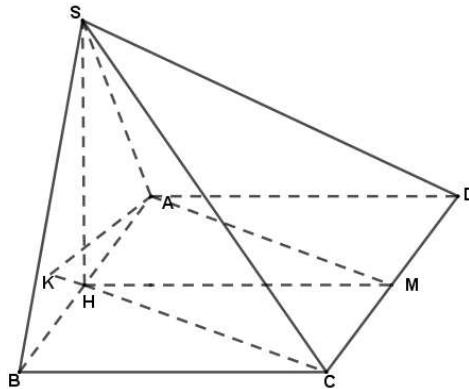
B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của cạnh AB , do tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \perp AB \end{cases}$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, xét tam giác BHC vuông tại B có:

$$CH = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Do H, M lần lượt là trung điểm của cạnh AB, CD nên $AM \parallel CH$.

Ta có $\begin{cases} AM \parallel HC \\ HC \subset (SHC), AM \not\subset (SHC) \Rightarrow AM \parallel (SHC). \\ \Rightarrow d(AM, SC) = d(AM, (SHC)) = d(A, (SHC)). \end{cases}$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, từ A kẻ $AK \perp HC$, mặt khác có $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp AK$, do đó $AK \perp (SHC)$. Vậy $d(A, (SHC)) = AK$.

Ta có $\Delta BHC \sim \Delta KHA$ (g.g) nên $\frac{AK}{BC} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow AK = \frac{AH}{CH} \cdot BC = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(AM, SC) = d(A, (SHC)) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 49: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD . Gọi M, E, F lần lượt là trung điểm của AB, SC, SD . Biết $SO = a$; $AB = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng ME và CF bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

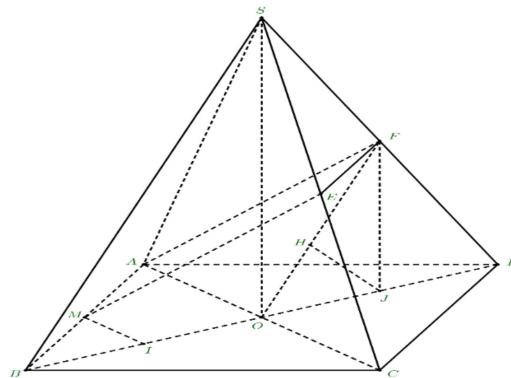
B. $\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{6}a$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của OB, OD .

Có O là trung điểm của IJ .

Có $FJ // SO \Rightarrow FJ \perp (ABCD)$.

Có $AFEM$ là hình bình hành nên $ME // AF \Rightarrow ME // (AFC)$.

$$\Rightarrow d(ME, CF) = d(ME, (AFC)) = d(M, (AFC)) = d(I, (AFC)) = d(J, (AFC))$$

Trong (SBD) kẻ JH vuông góc với OF tại H , để có JH vuông (AFC) .

$$\text{Có } FJ = \frac{a}{2}, JO = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$$\frac{1}{JH^2} = \frac{1}{JF^2} + \frac{1}{JO^2} \Rightarrow JH = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

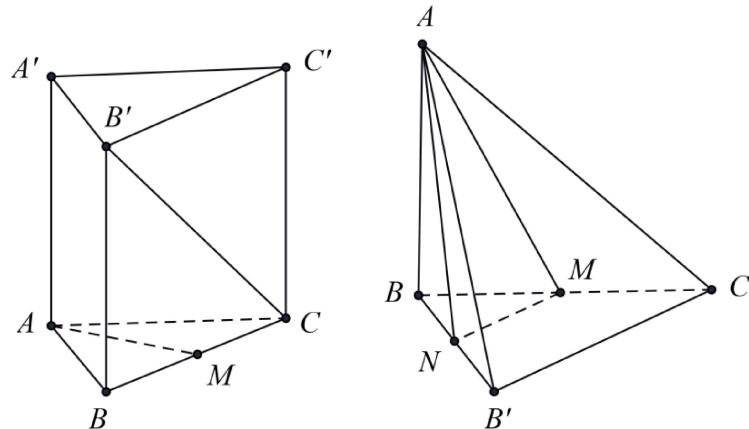
$$\text{Vậy } d(ME, CF) = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Câu 50: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách d của hai đường thẳng AM và $B'C$.

- A. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $d = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC vuông và $AB = BC = a$ nên ΔABC chỉ có thể vuông tại B .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCB').$$

Kè $MN // B'C \Rightarrow B'C // (AMN)$

$$\Rightarrow d = d(B'C, MN) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN)) = d(B, (AMN)).$$

Vì tứ diện $BAMN$ là tứ diện vuông nên

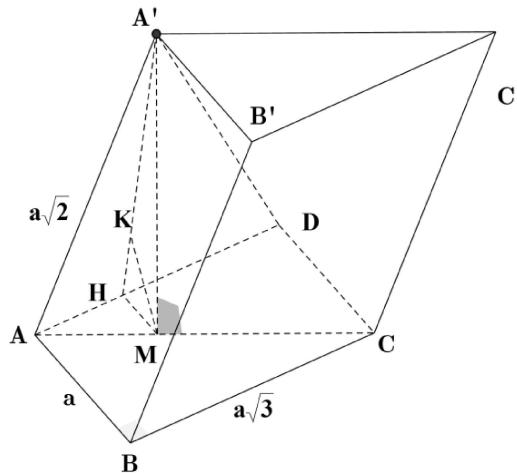
$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Câu 51: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BC = a\sqrt{3}, AB = a$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt đáy là điểm M thoả mãn $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{210}}{15}$. B. $\frac{a\sqrt{210}}{45}$. C. $\frac{a\sqrt{714}}{17}$. D. $\frac{a\sqrt{714}}{51}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình bình hành $ABCD$, vì tam giác ABC là tam giác vuông tại B nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

Suy ra $BC // AD \Rightarrow BC // (A'AD)$.

$$\text{Do đó } d(BC, AA') = d(BC, (A'AD)) = d(C, (A'AD)).$$

$$\text{Mà } 3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} \text{ nên } d(C, (A'AD)) = 3d(M, (A'AD)).$$

Kè $MH \perp AD \Rightarrow (A'MH) \perp (A'AD) = A'H$.

Kè $MK \perp A'H \Rightarrow MK \perp (A'AD) \Rightarrow MK = d(M, (A'AD))$.

$$\text{Mặt khác ta có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow AM = \frac{1}{3}AC = \frac{2a}{3} \Rightarrow A'M = \sqrt{A'A^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{14}}{3}.$$

$$\text{Và } MH // CD \Rightarrow \frac{MH}{CD} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MH = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}AB = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{MK^2} = \frac{1}{A'M^2} + \frac{1}{MH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{MK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{14}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{MK^2} = \frac{135}{14a^2} \Leftrightarrow MK = \frac{a\sqrt{210}}{45}$$

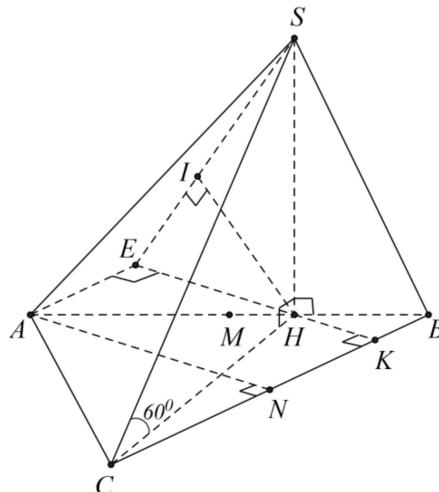
$$\text{Vậy } d(BC, AA') = d(C, (A'AD)) = 3d(M, (A'AD)) = 3MK = 3 \frac{a\sqrt{210}}{45} = \frac{a\sqrt{210}}{15}.$$

- Câu 52:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

- A. $\frac{\sqrt{42}}{8}a$. B. $\frac{\sqrt{42}}{6}a$. C. $\frac{\sqrt{42}}{4}a$. D. $\frac{\sqrt{42}}{3}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi N là trung điểm BC . Trong mặt phẳng (ABC) dựng đường thẳng d qua A và song song với BC .

Qua H dựng đường thẳng song song với AN cắt d tại E và cắt BC tại K . Khi đó tứ giác $AEKN$ là hình chữ nhật.

Ta có: $BC // AE \Rightarrow BC // (SAE) \Rightarrow d(BC, SA) = d(BC, (SAE)) = d(K, (SAE))$

Mặt khác $\frac{HB}{HA} = \frac{HK}{HE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{KH}{KE} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(K, (SAE)) = \frac{3}{2}d(H, (SAE))$.

Ta có $\begin{cases} AE \perp SH \\ AE \perp KE \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SHE) \Rightarrow (SHE) \perp (SAE)$

Trong mặt phẳng (SHE) kẻ $HI \perp SE$ tại I . Từ đó suy ra:

$$HI \perp (SAE) \Rightarrow d(H, (SAE)) = HI \Rightarrow d(BC, SA) = \frac{3}{2}HI.$$

$$HK = \frac{1}{3}AN \Rightarrow EH = \frac{2}{3}AN = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HI = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{6}.$$

$$\text{Vậy } d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{42}}{4}.$$

- Câu 53:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB bằng a . Gọi M là trung điểm của SB . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SD .

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

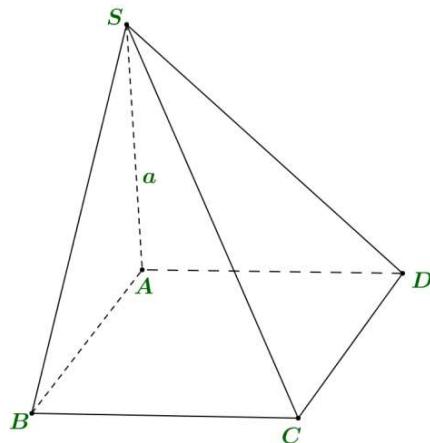
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

D. $\frac{4a}{3}$.

Lời giải

Chọn B

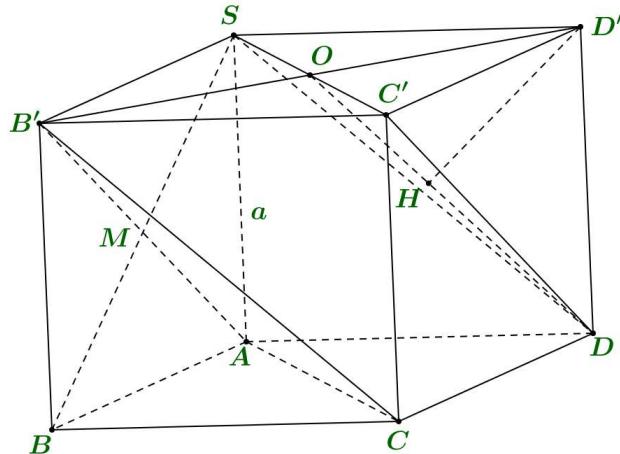


Ta có $CD // AB \Rightarrow CD // (SAB) \Rightarrow d(CD, SB) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB))$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD$. Mà $ABCD$ là hình vuông nên:

$$AD \perp AB \Rightarrow DA \perp (SAB) \Rightarrow DA = d(CD, SB) = a.$$

Dựng hình lập phương $ABCD \cdot SB'C'D'$ như hình vẽ.



Ta có:

$$AB' // DC' \Rightarrow AB' // (SC'D) \Rightarrow d(AM, SD) = d(AB', SD) = d(A, (SC'D)) = d(D', (SC'D)).$$

Gọi $O = SC' \cap B'D' \Rightarrow SC' \perp D'O$ mà $D'D \perp SC' \Rightarrow SC' \perp (OD'D) \Rightarrow (SC'D) \perp (OD'D)$

Trong mặt phẳng (DOD') kẻ $D'H \perp OD$ tại H . Suy ra $D'H \perp (SC'D) \Rightarrow d(AM, SD) = D'H$

$$\text{Ta có } D'O = \frac{a\sqrt{2}}{2}, D'D = a \Rightarrow d(AM, SD) = D'H = \frac{D'O \cdot D'D}{\sqrt{D'O^2 + D'D^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } d(AM, SD) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$