HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP (31-5-2021)

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Giai thừa

✪ Định nghĩa:

• Với mọi số tự nhiên dương n, tích $1.2.3....n$ được gọi là n - giai thừa và kí hiệu $n!$.

Vậy $n! = 1.2.3...n$.

Ta quy ước $0! = 1$.

✪ Tính chất:

* $n! = n(n-1)!$
* $n! = n(n-1)(n-2)...(n-k-1).k!$

2. Hoán vị.

✪ Định nghĩa:

• Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự ta được một hoán vị các phần tử của tập A.

• Kí hiệu số hoán vị của n phần tử là P_n.

✪ Số hoán vị của tập n phần tử:

• **Định lí**: Ta có $P_n = n!$

3. Chỉnh hợp.

✪ Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A.

✪ Số chỉnh hợp

Kí hiệu A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử

✪ Định lí: Ta có $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

4. Tổ hợp.

✪ Định nghĩa:

• Cho tập A có n phần tử và số nguyên k với $0 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A.

✪ Số tổ hợp

• Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử.

✪ Định lí: Ta có: $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

• Đếm số các hoán vị.

• Đếm số các chỉnh hợp.

• Đếm số các tổ hợp.

• Các bài toán liên quan.

• …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA BDG 2020-2021) Có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh từ một nhóm có 5 học sinh?

A. $5!$. **B.** A_5^3. **C.** C_5^3. **D.** 5^3.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán quy tắc đếm, cụ thể là quy tắc tổ hợp.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Số cách chọn ra k phần tử từ một tập hợp có n phần tử là một tổ hợp chập k của n, $(0 \le k \le n)$.

B2: Số cách chọn là $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Số cách chọn ra 3 học sinh từ một nhóm có 5 học sinh là một tổ hợp chập 3 của 5.

Số cách chọn là C_5^3.

Bài tập tương tự

Mức độ 1

Câu 1. Cần chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là

A. A_{30}^3. **B.** 3^{30}. **C.** 10. **D.** C_{30}^3.

Lời giải

Chọn D

Số cách chọn 3 người bất kì trong 30 người là C_{30}^3.

Câu 2. Cho tập hợp A có 20 phần tử, số tập con có hai phần tử của A là

A. $2C_{20}^2$. **B.** $2A_{20}^2$. **C.** C_{20}^2. **D.** A_{20}^2.

Lời giải

Chọn C

Số tập con là số cách chọn 2 phần tử trong 20 phần tử. Vậy có C_{20}^2 tập con.

Câu 3. Có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo thành từ 10 điểm phân biệt khác nhau trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

A. 45. **B.** 90. **C.** 35. **D.** 55.

Lời giải

Chọn A

Giả sử ta có hai điểm A, B phân biệt thì cho ta một đoạn thẳng AB (đoạn AB và đoạn BA giống nhau).

Vậy số đoạn thẳng được tạo thành từ 10 điểm phân biệt khác nhau là $C_{10}^2 = 45$.

Câu 4. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau.

A. 60. **B.** 10. **C.** 120. **D.** 125

Lời giải

Chọn C

Số các số tự nhiên lập được là số các hoán vị của 5 phần tử

Vậy có $5!=120$ số.

Câu 5. Cho đa giác lồi n đỉnh $(n>3)$. Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác đã cho là

A. A_n^3. **B.** C_n^3. **C.** $\frac{C_n^3}{3!}$. **D.** $n!$.

Lời giải

Chọn B

Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác đã cho là số tổ hợp chập 3 của n phần tử.

Số tam giác lập được là C_n^3.

Câu 6. Một tổ có 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh từ tổ đó để giữ hai chức vụ tổ trưởng và tổ phó.

A. A_{10}^2. **B.** C_{10}^2. **C.** A_{10}^8. **D.** 10^2.

Lời giải

Chọn A

Chọn ra 2 học sinh từ một tổ có 10 học sinh và phân công giữ chức vụ tổ trưởng, tổ phó là một chỉnh hợp chập 2 của 10 phần tử. Số cách chọn là A_{10}^2 cách.

Câu 7. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau.

A. 60. **B.** 10. **C.** 120. **D.** 125

Lời giải

Chọn A

Có thể lập $A_5^3=60$ số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau.

Câu 8. Giải bóng đá V-LEAGUE 2021 có tất cả 14 đội bóng tham gia, các đội bóng thi đấu vòng tròn 2 lượt. Hỏi giải đấu có tất cả bao nhiêu trận đấu?

A. 182. **B.** 91. **C.** 196. **D.** 140.

Lời giải

Chọn A

Số trận đấu là $A_{14}^2=182$.

Câu 9. Có bao nhiêu cách chọn 5 cầu thủ từ 11 trong một đội bóng để thực hiện đá 5 quả luân lưu 11 m, theo thứ tự quả thứ nhất đến quả thứ năm.

A. A_{11}^5. **B.** C_{11}^5. **C.** $A_{11}^2.5!$. **D.** C_{10}^5

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn 5 cầu thủ từ 11 trong một đội bóng để thực hiện đá 5 quả luân lưu 11m, theo thứ tự quả thứ nhất đến quả thứ năm là số chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử.

Nên số cách chọn là A_{11}^5.

Câu 10. Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác $ABCDEF$ là:

A. P_6. **B.** C_6^2. **C.** A_6^2. **D.** 36.

Lời giải

Chọn C

Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác $ABCDEF$ là A_6^2.

Mức độ 2

Câu 1. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ các chữ số đã cho lập được bao nhiêu số chẵn có bốn chữ số và các chữ số phải khác nhau.

A. 160. **B.** 156. **C.** 752. **D.** 240.

Lời giải

Chọn B

Gọi số có bốn chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$ $\left(a,b,c,d \in \{0,1,2,3,4,5\}, a \neq 0\right)$.

+ TH1: $d=0$ Số cách chọn bộ số abc là số chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử $\{1,2,3,4,5\}$. Suy ra có $A_5^3 = 60$.

+ TH2: $d \in \{2,4\}$

d có 2 cách chọn

a có 4 cách chọn

b có 4 cách chọn

c có 3 cách chọn

Suy ra có $2.4.4.3 = 96$

Áp dụng quy tắc cộng ta có tất cả $60+96=156$.

Câu 2. Từ các chữ số 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt 2 lần, chữ số 3 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 4 lần?

A. 1260. **B.** 40320. **C.** 120. **D.** 1728.

Lời giải

Chọn A

Chọn vị trí cho 2 chữ số 2 có C_9^2 cách.

Chọn vị trí cho 3 chữ số 3 có C_7^3 cách.

Chọn vị trí cho 4 chữ số 4 có C_4^4 cách.

Vậy số các số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán là $C_9^2\, C_7^3\, C_4^4 = 1260$ số.

Câu 3. Một tổ có 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 6 học sinh đi lao động, trong đó có đúng 2 học sinh nam?

A. $C_6^2 + C_9^4$. **B.** $C_6^2 C_{13}^4$. **C.** $A_6^2 A_9^4$. **D.** $C_6^2 C_9^4$.

Lời giải

Chọn D

Chọn 2 học sinh nam có C_6^2 cách.

Chọn 4 học sinh nữ có C_9^4 cách.

Vậy có $C_6^2 C_9^4$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4. Tính số cách chọn ra một nhóm 5 người từ 20 người sao cho trong nhóm đó có 1 tổ trưởng, 1 tổ phó và 3 thành viên còn lại có vai trò như nhau.

A. 310080. **B.** 930240. **C.** 1860480. **D.** 15505.

Lời giải

Chọn A

Có 20 cách để chọn 1 tổ trưởng từ 20 người.

Sau khi chọn 1 tổ trưởng thì có 19 cách để chọn 1 tổ phó.

Sau đó có C_{18}^3 cách để chọn 3 thành viên còn lại.

Vậy có $20.19.C_{18}^3 = 310080$ cách chọn một nhóm 5 người thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 5. Ngân hàng đề thi gồm 15 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 8 câu hỏi tự luận khác nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi sao cho mỗi đề thi gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 4 câu hỏi tự luận khác nhau.

A. $C_{15}^{10}.C_8^4$. **B.** $C_{15}^{10}+C_8^4$. **C.** $A_{15}^{10}.A_8^4$. **D.** $A_{15}^{10}+A_8^4$.

Lời giải

Chọn A

Chọn 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau từ 15 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau có C_{15}^{10} cách chọn.

Chọn 4 câu hỏi tự luận khác nhau từ 8 câu hỏi tự luận khác nhau có C_8^4 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $C_{15}^{10}.C_8^4$ cách lập đề thi.

Câu 6. Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp $12A$, 3 học sinh lớp $12B$ và 2 học sinh lớp $12C$. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

A. 120. **B.** 98. **C.** 150. **D.** 360.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn ngẫu nhiên 5 học sinh C_9^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh chỉ có 2 lớp: $C_7^5+C_6^5+C_5^5$

Vậy số cách chọn 5 học sinh có cả 3 lớp là $C_9^5-\left(C_7^5+C_6^5+C_5^5\right)=98$.

Câu 7. Có bao nhiêu cách chia 8 đồ vật khác nhau cho 3 người sao cho có một người được 2 đồ vật và hai người còn lại mỗi người được ba đồ vật?

A. $3!C_8^2C_6^3$. **B.** $C_8^2C_6^3$. **C.** $A_8^2A_6^3$. **D.** $3C_8^2C_6^3$.

Lời giải

Chọn A

Việc chia đồ vật trong bài toán được tiến hành theo các bước sau

- Bước 1: Chia 8 đồ vật thành 3 nhóm đồ vật nhỏ, có $C_8^2C_6^3C_3^3=C_8^2C_6^3$ cách

- Bước 2: Chia 3 nhóm đồ ở bước 1 cho 3 người, có $3!$ cách

Vậy có $3!C_8^2C_6^3$ cách.

Câu 8. Cho số tự nhiên n thỏa mãn $3C_{n+1}^3-3A_n^2=52(n-1)$. Hỏi n gần với giá trị nào nhất:

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} n\ge 2 \\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

Ta có $3C_{n+1}^3-3A_n^2=52(n-1)\Leftrightarrow 3\dfrac{(n+1)!}{3!(n-2)!}-3\dfrac{n!}{(n-2)!}=52(n-1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+1)n(n-1)}{2}-3n(n-1)=52(n-1)\Leftrightarrow (n+1)n-6n=104\Leftrightarrow n^2-5n-104=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=13(t/m) \\ n=-8(loai)\end{array}\right.$. Vậy $n=13$.

Câu 9. Giải phương trình $A_x^3+C_x^{x-2}=14x$.

A. Một số khác. **B.** $x=6$. **C.** $x=5$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x\in\mathbb{Z}; x\ge 3$.

$A_x^3+C_x^{x-2}=14x \Leftrightarrow x\left(x-1\right)\left(x-2\right)+\dfrac{x\left(x-1\right)}{2}=14x$

$\Leftrightarrow 2\left(x-1\right)\left(x-2\right)+\left(x-1\right)=28$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x-25=0 \Leftrightarrow x=5; x=-\dfrac{5}{2}$.

Kết hợp điều kiện thì $x=5$.

Câu 10. Cho đa giác đều có n cạnh $\left(n\ge 4\right)$. Tìm n để đa giác có số đường chéo bằng số cạnh?

A. $n=5$. **B.** $n=16$. **C.** $n=6$. **D.** $n=8$.

Lời giải

Chọn A

Tổng số đường chéo và cạnh của đa giác là: $C_n^2 \Rightarrow$ Số đường chéo của đa giác là C_n^2-n.

Ta có: Số đường chéo bằng số cạnh

$\Leftrightarrow C_n^2-n=n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!\left(n-2\right)!}=2n \Leftrightarrow n\left(n-1\right)=4n \Leftrightarrow n-1=4 \Leftrightarrow n=5$.

Mức độ 3

Câu 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó chứa các chữ số 3, 4, 5 và chữ số 4 đứng cạnh chữ số 3 và chữ số 5?

A. 1470. **B.** 750. **C.** 2940. **D.** 1500.

Lời giải

Chọn D

Giả sử mỗi số thỏa mãn yêu cầu bài toán có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

Các chữ số 3, 4, 5 luôn đứng cạnh nhau và chữ số 4 đứng giữa hai chữ số còn lại có 2 cách xếp là 345 và 543.

Trường hợp 1: $a_2=4$, ta có: $2.A_7^3=420$ số.

Trường hợp 2: $a_3=4$ hoặc $a_4=4$ hoặc $a_5=4$ có $3.2..6.A_6^2=1080$ số.

Vậy có $420+1080=1500$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Có bao nhiêu số tự nhiên có bảy chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3.

A. 3204 số. **B.** 249 số. **C.** 2942 số. **D.** 7440 số.

Lời giải

Chọn D

Vì chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3 nên số cần lập có bộ ba số 123 hoặc 321.

TH1: Số cần lập có bộ ba số 123.

Nếu bộ ba số 123 đứng đầu thì số có dạng $\overline{123abcd}$.

Có $A_7^4=840$ cách chọn bốn số a, b, c, d nên có $A_7^4=840$ số.

Nếu bộ ba số 123 không đứng đầu thì số có 4 vị trí đặt bộ ba số 123.

Có 6 cách chọn số đứng đầu và có $A_6^3=120$ cách chọn ba số b, c, d.

Theo quy tắc nhân có $6.4.A_6^3=2880$ số

Theo quy tắc cộng có $840+2880=3720$ số.

TH2: Số cần lập có bộ ba số 321.

Do vai trò của bộ ba số 123 và 321 như nhau nên có $2(840+2880)=7440$.

Câu 3. Từ các số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số ở hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn bằng 8.

A. 1300. **B.** 1440. **C.** 1500. **D.** 1600.

Lời giải

Chọn B

Gọi $n=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là một số thỏa yêu cầu bài toán thì

$a_3+a_4+a_5=8$.

Có hai bộ 3 số có tổng bằng 8 trong các số 1,2,…,8,9 là:

$\{1;2;5\}$ và $\{1;3;4\}$

Nếu $a_3;a_4;a_5\in\{1;2;5\}$ thì a_3,a_4,a_5 có $3!$ cách chọn và a_1,a_2,a_6 có A_6^3 cách chọn suy ra có $3!A_6^3=720$ số thỏa yêu cầu.

Nếu $a_3;a_4;a_5\in\{1;3;4\}$ thì cũng có 720 số thỏa yêu cầu.

Vậy có $720+720=1440$ số thỏa yêu cầu.

Câu 4. Trong các số nguyên từ 100 đến 999, số các số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần (kể từ trái qua phải) bằng:

A. 204. **B.** 120. **C.** 168. **D.** 240.

Lời giải

Chọn A

Số nguyên cần lập có 3 chữ số đôi một khác nhau. Xét hai trường hợp:

TH1: Các chữ số tăng dần từ trái qua phải.

Khi đó 3 chữ số được chọn từ tập $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Với mỗi cách chọn 3 chữ số từ tập này ta có duy nhất một cách xếp chúng theo thứ tự tăng dần. Do đó số các số lập được trong trường hợp này là: C_9^3.

TH2: Các chữ số giảm dần từ trái qua phải.

Khi đó 3 chữ số được chọn từ tập $B=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Với mỗi cách chọn 3 chữ số từ tập này ta có duy nhất một cách xếp chúng theo thứ tự giảm dần. Do đó số các số lập được trong trường hợp này là: C_{10}^3.

Vậy số các số cần tìm là: $C_9^3+C_{10}^3=204$ số.

Câu 5. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt hai lần, chữ số ba có mặt ba lần và các chữ số còn lại có mặt nhiều nhất một lần?

A. 26460. **B.** 27901. **C.** 11340. **D.** 26802

Lời giải

Chọn C

- Ta đếm các số có 7 chữ số được chọn từ các số $\{2,2,3,3,3,a,b\}$ với $a,b\in\{0,1,4,5,6,7,8,9\}$, kể cả số 0 đứng đầu.

Ta có được: $7!$ số như vậy. Tuy nhiên khi hoán vị hai số 2 cho nhau hoặc các số 3 cho nhau thì ta được số không đổi do đó có tất cả

$\frac{7!}{2!.3!}=420$ số.

Vì có C_8^2 cách chọn a,b nên ta có: $420.C_8^2=11760$ số.

- Ta đếm các số có 6 chữ số được chọn từ các số $\{2,2,3,3,3,x\}$ với $x\in\{1,4,5,6,7,8,9\}$.

Tương tự như trên ta tìm được $\frac{6!}{2!.3!}C_7^1=420$ số

Vậy số các số thỏa yêu cầu bài toán: $11760-420=11340$ số.

Câu 6. Cho đa giác đều $A_1A_2A_3....A_{30}$ nội tiếp trong đường tròn (O). Tính số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 30 đỉnh của đa giác đó.

A. 105. **B.** 27405. **C.** 27406. **D.** 106.

Lời giải

Chọn A

Trong đa giác đều $A_1A_2A_3....A_{30}$ nội tiếp trong đường tròn (O) cứ mỗi điểm A_1 có một điểm A_i đối xứng với A_1 qua O $(A_1\neq A_i)$ ta được một đường kính, tương tự với A_2, A_3,.., A_{30}. Có tất cả 15 đường kính mà các điểm là đỉnh của đa giác đều $A_1A_2A_3....A_{30}$. Cứ hai đường kính đó ta được một hình chữ nhật mà bốn điểm là các đỉnh của đa giác đều: có $C_{15}^2=105$ hình chữ nhật tất cả.

Câu 7. Có 10 đội bóng thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt, thắng được 3 điểm, hòa 1 điểm, thua 0 điểm. Kết thúc giải đấu, tổng cộng số điểm của tất cả 10 đội là 130. Hỏi có bao nhiêu trận hòa?

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Vì 10 đội bóng thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt nên số trận đấu là $C_{10}^2=45$ (trận).

Gọi số trận hòa là x, số không hòa là $45-x$ (trận).

Tổng số điểm mỗi trận hòa là 2, tổng số điểm của trận không hòa là $3(45-x)$.

Theo đề bài ta có phương trình $2x+3(45-x)=130\Leftrightarrow x=5$.

Vậy có 5 trận hòa.

Câu 8. Trong một giải cờ vua gồm nam và nữ vận động viên. Mỗi vận động viên phải chơi hai ván với mỗi động viên còn lại. Cho biết có 2 vận động viên nữ và cho biết số ván các vận động viên nam chơi với nhau hơn số ván họ chơi với hai vận động viên nữ là 84. Hỏi số ván tất cả các vận động viên đã chơi?

A. 168. **B.** 156. **C.** 132. **D.** 182.

Lời giải

Chọn D

Gọi số vận động viên nam là n.

Số ván các vận động viên nam chơi với nhau là $2.C_n^2=n(n-1)$.

Số ván các vận động viên nam chơi với các vận động viên nữ là $2.2.n=4n$.

Vậy ta có $n(n-1)-4n=84\Rightarrow n=12$.

Vậy số ván các vận động viên chơi là $2C_{14}^2=182$.

Câu 9. Hai nhóm người cần mua nền nhà, nhóm thứ nhất có 2 người và họ muốn mua 2 nền kề nhau, nhóm thứ hai có 3 người và họ muốn mua 3 nền kề nhau. Họ tìm được một lô đất chia thành 7 nền đang rao bán (các nền như nhau và chưa có người mua). Tính số cách chọn nền của mỗi người thỏa yêu cầu trên.

A. 144. **B.** 288. **C.** 140. **D.** 132

Lời giải

Chọn B

Xem lô đất có 4 vị trí gồm 2 vị trí 1 nền, 1 vị trí 2 nền và 1 vị trí 3 nền.

Bước 1: nhóm thứ nhất chọn 1 vị trí cho 2 nền có 4 cách và mỗi cách có $2!=2$ cách chọn nền cho mỗi người. Suy ra có $4.2=8$ cách chọn nền.

Bước 2: nhóm thứ hai chọn 1 trong 3 vị trí còn lại cho 3 nền có 3 cách và mỗi cách có $3!=6$ cách chọn nền cho mỗi người.

Suy ra có $3.6=18$ cách chọn nền.

Bước 3: 2 nền còn lại có 2 cách chọn

Vậy có $8.18.2=288$ cách chọn nền cho mỗi người.

Câu 10. Một nhóm học sinh gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một đội cờ đỏ sao cho phải có 1 đội trưởng nam, 1 đội phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội cờ đỏ.

A. 131444. **B.** 141666. **C.** 241561. **D.** 111300.

Lời giải

Chọn D

Vì trong 5 người được chọn phải có ít nhất 1 nữ và ít nhất phải có 2 nam nên số học sinh nữ gồm 1 hoặc 2 hoặc 3 nên ta có các trường hợp sau:

- chọn 1 nữ và 4 nam.

+) Số cách chọn 1 nữ: 5 cách

+) Số cách chọn 2 nam làm đội trưởng và đội phó: A_{15}^2

+) Số cách chọn 2 nam còn lại: C_{13}^2

Suy ra có $5A_{15}^2.C_{13}^2$ cách chọn cho trường hợp này.

- Chọn 2 nữ và 3 nam.

+) Số cách chọn 2 nữ: C_5^2 cách.

+) Số cách chọn 2 nam làm đội trưởng và đội phó: A_{15}^2 cách.

+) Số cách chọn 1 còn lại: 13 cách.

Suy ra có $13A_{15}^2.C_5^2$ cách chọn cho trường hợp này.

- Chọn 3 nữ và 2 nam.

+) Số cách chọn 3 nữ: C_5^3 cách.

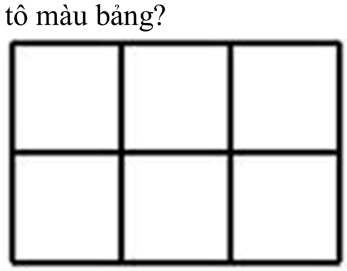
+) Số cách chọn 2 làm đội trưởng và đội phó: A_{15}^2 cách.

Suy ra có $A_{15}^2.C_5^3$ cách chọn cho trường hợp 3.

Vậy có $5A_{15}^2.C_{13}^2+13A_{15}^2.C_5^2+A_{15}^2.C_5^3=111300$ cách.

Mức độ 4

Câu 1. Bé Minh có một bảng hình chữ nhật gồm 6 hình vuông đơn vị, cố định không xoay như hình vẽ. Bé muốn dùng 3 màu để tô tất cả các cạnh của các hình vuông đơn vị, mỗi cạnh tô một lần sao cho mỗi hình vuông đơn vị được tô bởi đúng 2 màu, trong đó mỗi màu tô đúng 2 cạnh. Hỏi bé Minh có tất cả bao nhiêu cách tô màu bảng?



A. 4374. **B.** 139968. **C.** 576. **D.** 15552.

Lời giải

Chọn D

Tô màu theo nguyên tắc:

Tô 1 ô vuông 4 cạnh: chọn 2 trong 3 màu, ứng với 2 màu được chọn có 6 cách tô. Do đó, có $6.C_3^2$ cách tô.

Tô 3 ô vuông 3 cạnh (có một cạnh đã được tô trước đó): ứng với 1 ô vuông có 3 cách tô màu, 1 trong 3 cạnh theo màu của cạnh đã tô trước đó, chọn 1 trong 2 màu còn lại tô 2 cạnh còn lại, có $3.C_2^1 = 6$ cách tô. Do đó có 6^3 cách tô.

Tô 2 ô vuông 2 cạnh (có 2 cạnh đã được tô trước đó): ứng với 1 ô vuông có 2 cách tô màu 2 cạnh (2 cạnh tô trước cùng màu hay khác nhau không ảnh hưởng số cách tô). Do đó có 2^2 cách tô.

Vậy có: $6.C_3^2.6^3.4 = 15552$ cách tô.

Câu 2. Trong mặt phẳng cho n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong tất cả các đường thẳng nối hai điểm bất kì, không có hai đường thẳng nào song song, trùng nhau hoặc vuông góc. Qua mỗi điểm vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại. Số giao điểm của các đường thẳng vuông góc giao nhau là bao nhiêu?

A. $2C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - \left[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3\right]$.

B. $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - 2\left[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3\right]$.

C. $3C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - 2\left[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3\right]$.

D. $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - \left[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3\right]$.

Lời giải

Chọn D

Gọi n điểm đã cho là $A_1, A_2, ..., A_n$. Xét một điểm cố định, khi đó có C_{n-1}^2 đường thẳng nên sẽ có C_{n-1}^2 đường thẳng vuông góc đi qua điểm cố định đó.

Do đó có $nC_{n-1}^2 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên có

$C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}$ giao điểm (tính cả những giao điểm trùng nhau).

Ta chia các điểm trùng nhau thành 3 loại:

* Qua một điểm có $C_{n-1}^2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ nên ta phải trừ đi $n\left(C_{n-1}^2 - 1\right)$ điểm.

* Qua A_1, A_2, A_3 có 3 đường thẳng cùng vuông góc với A_4A_5 và 3 đường thẳng này song song với nhau, nên ta mất 3 giao điểm, do đó trong TH này ta phải loại đi: $3C_n^3$.

* Trong mỗi tam giác thì ba đường cao chỉ có một giao điểm, nên ta mất 2 điểm cho mỗi tam giác, do đó trường hợp này ta phải trừ đi $2C_n^3$.

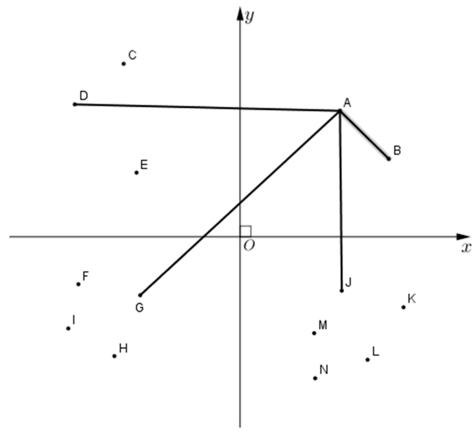
Vậy số giao điểm nhiều nhất có được là: $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - \left[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3\right]$.

Câu 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ở góc phần tư thứ nhất ta lấy 2 điểm phân biệt; cứ thế ở các góc phần tư thứ hai, thứ ba, thứ tư lần lượt lấy $3, 4, 5$ điểm phân biệt (các điểm không nằm trên các trục toạ độ). Trong 14 điểm đó ta lấy 2 điểm bất kỳ và nối chúng lại, hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng cắt hai trục toạ độ, biết đoạn thẳng nối 2 điểm bất kì không qua O.

A. 91. **B.** 42. **C.** 29. **D.** 23.

Lời giải

Chọn D



Để chọn 2 điểm trong 14 điểm đã cho nối lại cắt hai trục toạ độ thì hai điểm đó phải thuộc hai góc phần tư đối đỉnh với nhau.

TH1: Chọn 1 điểm ở góc phần tư thứ I và 1 điểm ở góc phần tư thứ III

Số đoạn thẳng tạo thành: $2.4=8$.

TH2: Chọn 1 điểm ở góc phần tư thứ II và 1 điểm ở góc phần tư thứ IV

Số đoạn thẳng tạo thành: $3.5=15$.

Theo quy tắc cộng ta có $8+15=23$ đoạn thẳng.

Câu 4. Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số gồm 2011 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9?

A. $10^{2010}-16151.9^{2008}$. **B.** $10^{2010}-16153.9^{2008}$.

C. $10^{2010}-16148.9^{2008}$. **D.** $10^{2010}-16161.9^{2008}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $A_1=\{0;9\}$; $A_2=\{1\}$; $A_3=\{2\}$; $A_4=\{3\}$; $A_5=\{4\}$; $A_6=\{5\}$; $A_7=\{6\}$; $A_8=\{7\}$; $A_9=\{8\}$

Gọi số cần tìm là $n=\overline{a_1a_2...a_{2010}a_{2011}}$ $(a_1\neq 0)$

+ Xét các số tự nhiên chia hết cho 9, gồm 2011 chữ số:

Mỗi vị trí từ a_2 đến a_{2011} đều có 10 cách chọn

a_1 phụ thuộc vào tổng $(a_2+a_3+...+a_{2011})$ nên có 1 cách chọn

Vậy có 10^{2010} số

+ Xét các số tự nhiên chia hết cho 9, gồm 2011 chữ số nhưng không có mặt chữ số 9:

a_1 có 8 cách chọn

Từ a_2 đến a_{2010}, mỗi vị trí đều có 9 cách chọn

a_{2011} có 1 cách chọn

Vậy có 8.9^{2009} số.

+ Xét các số tự nhiên chia hết cho 9, gồm 2011 chữ số trong đó có đúng 1 chữ số 9:

- Trường hợp $a_1=9$ ta có:

Từ a_2 đến a_{2010}, mỗi vị trí đều có 9 cách chọn

a_{2011} có 1 cách chọn

Do đó có 9^{2009} số

- Trường hợp $a_1\neq 9$ ta có:

a_1 có 8 cách chọn

Có 2010 cách xếp chữ số 9

Ở 2008 vị trí còn lại, mỗi vị trí có 9 cách chọn

Vị trí cuối cùng có 1 cách chọn

Do đó có $8.2010.9^{2008}$ số.

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$10^{2010}-\left(8.9^{2009}+9^{2009}+8.2010.9^{2008}\right)=10^{2010}-16161.9^{2008}$ số.

Câu 5. Có bao nhiêu số tự nhiên có 2018 chữ số sao cho trong mỗi số tổng các chữ số bằng 5?

A. $1+2A_{2018}^{2}+2\left(C_{2017}^{2}+A_{2017}^{2}\right)+\left(C_{2017}^{3}+A_{2017}^{3}\right)+C_{2017}^{4}$.

B. $1+2C_{2018}^{2}+2C_{2018}^{3}+C_{2018}^{4}+C_{2018}^{5}$.

C. $1+2A_{2018}^{2}+2A_{2018}^{3}+A_{2018}^{4}+C_{2017}^{5}$.

D. $1+4C_{2017}^{1}+2\left(C_{2017}^{2}+A_{2017}^{2}\right)+\left(C_{2017}^{3}+A_{2016}^{2}+C_{2016}^{2}\right)+C_{2017}^{4}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $5=4+1=3+2=2+2+1=3+1+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$ nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Số tự nhiên có một chữ số 5 đứng đầu và 2017 số 0 đứng sau: Có 1 số.

Trường hợp 2: Số tự nhiên có một chữ số 4, một chữ số 1 và 2016 số 0.

Khả năng 1: Nếu số 4 đứng đầu thì số 1 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^{1} số.

Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu thì số 4 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^{1} số.

Trường hợp 3: Số tự nhiên có một chữ số 3, một chữ số 2 và 2016 số 0

Khả năng 1: Nếu số 3 đứng đầu thì số 2 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^{1} số.

Khả năng 2: Nếu số 2 đứng đầu thì số 3 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^{1} số.

Trường hợp 4: Số tự nhiên có hai chữ số 2, một chữ số 1 và 2015 số 0

Khả năng 1: Nếu số 2 đứng đầu thì số 1 và số 2 còn lại đứng ở hai trong 2017 vị trí còn lại nên ta có A_{2017}^{2} số.

Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu thì hai chữ số 2 đứng ở hai trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^{2} số.

Trường hợp 5: Số tự nhiên có 2 chữ số 1, một chữ số 3 thì tương tự như trường hợp 4 ta có $A_{2017}^{2}+C_{2017}^{2}$ số.

Trường hợp 6: Số tự nhiên có một chữ số 2, ba chữ số 1 và 2014 số 0.

Khả năng 1: Nếu số 2 đứng đầu thì ba chữ số 1 đứng ở ba trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^{3} số.

Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu và số 2 đứng ở vị trí mà không có số 1 nào khác đứng trước nó thì hai số 1 còn lại đứng ở trong 2016 vị trí còn lại nên ta có C_{2016}^{2} số.

Khả năng 3: Nếu số 1 đứng đầu và số 2 đứng ở vị trí mà đứng trước nó có hai số 1 thì hai số 1 và 2 còn lại đứng ở trong 2016 vị trí còn lại nên ta có A_{2016}^{2} số.

Trường hợp 7: Số tự nhiên có năm chữ số 1 và 2013 số 0, vì chữ số 1 đứng đầu nên bốn chữ số 1 còn lại đứng ở bốn trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^{4} số.

Áp dụng quy tắc cộng ta có $1+4C_{2017}^{1}+2\left(C_{2017}^{2}+A_{2017}^{2}\right)+\left(C_{2017}^{3}+A_{2016}^{2}+C_{2016}^{2}\right)+C_{2017}^{4}$ số cần tìm.

Câu 6. Cho tập $A=\{1;2;3;...;2018\}$ và các số $a,b,c\in A$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có dạng abc sao cho $a<b<c$ và $a+b+c=2016$.

A. 2027070. **B.** 2026086. **C.** 337681. **D.** 20270100.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $a+b+c=2016$.

Ta biết phương trình trên có C_{2015}^{2} nghiệm nguyên dương.

• TH1: Xét các cặp nghiệm 3 số trùng nhau: $a=b=c=672$.

• TH2: Xét các cặp nghiệm có $a=b$, $c\neq a\Rightarrow 2a+c=2016$. Suy ra c là số chẵn thỏa $0<c<2016$ nên có 1007 giá trị c. Do đó có 1007 cặp, mà có cặp trừ cặp $(672,672,672)$ (loại). Do đó có 1006 cặp.

• Tương tự ta suy ra có 1006.3 cặp nghiệm có 2 trong 3 số trùng nhau.

Do đó số tập hợp gồm ba phần tử có tổng bằng 2016 là $\dfrac{C_{2015}^{2}-3.1006-1}{3!}=337681$.

(Chia cho $3!$ là do $a<b<c$ nên không tính hoán vị của bộ ba (a,b,c)).

Câu 7. Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn $100°$?

A. $2018.C_{897}^{3}$. **B.** C_{1009}^{3}. **C.** $2018.C_{895}^{3}$. **D.** $2018.C_{896}^{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A_1, A_2, \ldots, A_{2018}$ là các đỉnh của đa giác đều 2018 đỉnh.

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều $A_1A_2...A_{2018}$.

Các đỉnh của đa giác đều chia (O) thành 2018 cung tròn bằng nhau, mỗi cung tròn có số đo bằng $\dfrac{360°}{2018}$.

Vì tam giác cần đếm có đỉnh là đỉnh của đa giác nên các góc của tam giác là các góc nội tiếp của (O).

Suy ra góc lớn hơn $100°$ sẽ chắn cung có số đo lớn hơn $200°$.

Cố định một đỉnh A_i. Có 2018 cách chọn A_i.

Gọi A_i, A_j, A_k là các đỉnh sắp thứ tự theo chiều kim đồng hồ sao cho $\overset{\frown}{A_iA_k}<160°$ thì $\overset{\frown}{A_iA_jA_k}>100°$ và tam giác $A_iA_jA_k$ là tam giác cần đếm.

Khi đó $\overset{\frown}{A_iA_k}$ là hợp liên tiếp của nhiều nhất $\left\lfloor \dfrac{160}{\frac{360}{2018}} \right\rfloor=896$ cung tròn nói trên.

896 cung tròn này có 897 đỉnh. Trừ đi đỉnh A_i thì còn 896 đỉnh. Do đó có C_{896}^2 cách chọn hai đỉnh A_j, A_k.

Vậy có tất cả $2018.C_{896}^2$ tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+...+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)}$.

A. $n=101$. **B.** $n=98$. **C.** $n=99$. **D.** $n=100$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có:

$$\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}=\frac{n!}{k!(n-k)!(k+1)(k+2)}=\frac{(n+2)!}{(n-k)!(k+2)!(n+1)(n+2)}=\frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Suy ra: $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$

$$\Leftrightarrow \frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+...+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{C_{n+2}^2+C_{n+2}^3+C_{n+2}^4+...+C_{n+2}^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\quad (*).$$

Ta xét khai triển sau: $(1+x)^{n+2}=C_{n+2}^0+x.C_{n+2}^1+x^2.C_{n+2}^2+x^3.C_{n+2}^3+...+x^{n+2}.C_{n+2}^{n+2}$.

Chọn $x=1\longrightarrow 2^{n+2}=C_{n+2}^0+C_{n+2}^1+C_{n+2}^2+C_{n+2}^3+...+C_{n+2}^{n+2}$.

Do đó: $(*)\Leftrightarrow \frac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{n+2}-C_{n+2}^0-C_{n+2}^1}{(n+1)(n+2)}\Leftrightarrow 2^{100}=2^{n+2}\Leftrightarrow n=98$.

Cách 2: Ta có:

$$S=\frac{C_n^0}{1.2}+\frac{C_n^1}{2.3}+\frac{C_n^2}{3.4}+...+\frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)C_n^0+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)C_n^1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)C_n^2+.....+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)C_n^n$$

$$=\left(\frac{1}{1}C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+.....\frac{1}{n+1}C_n^n\right)-\left(\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+.....\frac{1}{n+2}C_n^n\right)$$

Lại có: $\int_0^1(1+x)^n\mathrm{d}x-\int_0^1 x(1+x)^n\,\mathrm{d}x=\int_0^1 2(1+x)^n\,\mathrm{d}x-\int_0^1(1+x)^{n+1}\,\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1}C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+.....\frac{1}{n+1}C_n^n\right)-\left(\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+.....\frac{1}{n+2}C_n^n\right)$$

$$=\frac{2}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1-\frac{1}{n+2}(1+x)^{n+2}\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{2.2^{n+1}-2}{n+1}-\frac{2^{n+2}-1}{n+2}=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}$$

Kết hợp giả thiết có $\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)}\Rightarrow n=98$.

Câu 9. Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n=\frac{1}{C_3^3}+\frac{1}{C_4^3}+\frac{1}{C_5^4}+...+\frac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $C_n^3 = \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = \dfrac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{(n-3)!\times 6} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} \Rightarrow \dfrac{1}{C_n^3} = \dfrac{6}{n(n-1)(n-2)}$

Vậy ta có $S_n = \dfrac{6}{1.2.3} + \dfrac{6}{2.3.4} + \dfrac{6}{3.4.5} + ... + \dfrac{6}{n(n-1)(n-2)}$

Nhận xét $\dfrac{2}{1.2.3} = \dfrac{1}{1.2} - \dfrac{1}{2.3}$; $\dfrac{2}{2.3.4} = \dfrac{1}{2.3} - \dfrac{1}{3.4}$; ; $\dfrac{2}{(n-2)(n-1)n} = \dfrac{1}{(n-2)(n-1)} - \dfrac{1}{(n-1)n}$

$\Rightarrow S_n = 3\left(\dfrac{1}{1.2} - \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{2.3} - \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n-2} - \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right) = 3\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\right) = 3\left(\dfrac{n-2}{2n}\right) = \dfrac{3n-6}{2n}$

Vậy $\lim S_n = \lim\left(\dfrac{3n-6}{2n}\right) = \lim\left(\dfrac{3-\dfrac{6}{n}}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$.

Câu 10. Xét một bảng ô vuông gồm 4×4 ô vuông. Người ta điền vào mỗi ô vuông đó một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách?

A. 72. **B.** 90. **C.** 80. **D.** 144.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét 1: Trên mỗi hàng có 2 số 1 và 2 số -1, mỗi cột có 2 số 1 và 2 số -1

Nhận xét 2: Để tổng các số trong mỗi hàng và trong mỗi cột bằng 0 đồng thời có không quá hai số bằng nhau và ba hàng đầu tiên đã được xếp số thì ta chỉ có một cách xếp hàng thứ tư.

Do vậy ta tìm số cách xếp ba hàng đầu tiên. Phương pháp giải bài này là xếp theo hàng. (Hình vẽ). Các hàng được đánh số như sau:

Hàng 1				
Hàng 2				
Hàng 3				
Hàng 4				

Nếu xếp tự do thì mỗi hàng đều có $\dfrac{4!}{2!.2!} = 6$ cách điền số mà tổng các số bằng 0, đó là các cách xếp như sau (Ta gọi là các bộ số từ (1) đến (6)):

$11-1-1\ (1)$, $1-1-11\ (2)$, $-1-111\ (3)$, $-11-11\ (4)$, $1-11-1\ (5)$, $-111-1\ (6)$

Giả sử hàng 1 được xếp như bộ (1). Số cách xếp hàng 2 có các khả năng sau

KN1: Hàng 2 xếp giống hàng 1: Có 1 cách xếp (bộ (1)).

Hàng 3 có 1 cách (bộ (3)). Hàng 4 có 1 cách. Vậy có $1.1.1.1=1$ cách xếp.

KN2: Hàng 2 xếp đối xứng với hàng 1: Có 1 cách xếp (bộ (3))

Hàng 3 có 6 cách (lấy thoải mái từ các bộ vì tổng hai hàng trên đã bằng 0). Hàng 4 có 1 cách. Vậy có $1.1.6.1=6$ cách xếp.

KN3: Hàng 2 xếp trùng với cách xếp hàng 1 ở 2 vị trí: Có 4 cách xếp (4 bộ còn lại)

Khi đó, với mỗi cách xếp hàng thứ 2, hàng 3 có 2 cách.Hàng 4 có 1 cách. Vậy có $1.4.2.1=8$ cách xếp.

Vì vai trò các bộ số như nhau nên số cách xếp thỏa mãn ycbt là $6.\left(1+6+8\right)=90$ cách.