

## ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ (1-6-2021)

### DẠNG 1. TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

**Bài 1.** Dựa vào định nghĩa, hãy tính đạo hàm của các hàm số sau

1)  $y = x^2 - 3x - 3$  tại  $x = 1$ ;

2)  $y = \sqrt{7 - 2x}$  tại  $x = 3$ ;

3)  $y = \frac{x+1}{x-1}$  tại  $x = 0$ ;

4)  $y = -\frac{3}{x}$  tại  $x = 2$ ;

**Bài 2.** Dựa vào định nghĩa, hãy tính đạo hàm của các hàm số sau

1)  $y = \frac{x-3}{1+|x|}$  tại  $x = 0$ ;

2)  $y = \sin 2x$  tại  $x = \pi$ .

**Bài 3.** Dựa vào định nghĩa, hãy tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm  $x_0$  bất kì thuộc tập xác định.

1)  $y = x^3 - 5x^2 + 4x - 7$ .

2)  $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}$ .

3)  $y = \sqrt{x^2 + 2x + 6}$ .

**Bài 4.** Chứng minh hàm số  $y = f(x) = |x^2 - x - 6|$  không có đạo hàm tại  $x = 3$  nhưng có đạo hàm tại  $x = 4$ .

**Bài 5.** Hãy xét tính có đạo hàm của các hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$  cho trước:

1)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$  với  $x_0 = 2$ .

2)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^5 - 32 - 80(x-2)}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 80 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$  với  $x_0 = 2$ .

3)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 64} & \text{khi } x \neq 64 \\ 3 & \text{khi } x = 64 \end{cases}$  với  $x_0 = 64$ .

4)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$  với  $x_0 = 0$ .

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{v\u00f3i } x_0 = 1.$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ x^2+x-\frac{15}{8} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{v\u00f3i } x_0 = 1.$$

$$7) f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{v\u00f3i } x_0 = 0.$$

$$8) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^3(\pi|x|)}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{v\u00f3i } x_0 = 0.$$

## DẠNG 2. TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG CÔNG THỨC

**Bài 6.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$\text{a) } y = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1.$$

$$\text{b) } y = x^6 - 4x^5 + 3x - \frac{3}{2}.$$

$$\text{c) } y = (x^7 + x)^2.$$

$$\text{d) } y = -10\sqrt{x} + \frac{21}{x}.$$

$$\text{e) } y = 2x^3 - 3\sqrt[3]{x} + 1.$$

$$\text{f) } y = \frac{2x+1}{4x-3}.$$

$$\text{g) } y = \frac{5x-3}{x^2+x+1}.$$

$$\text{h) } y = \frac{-3x^2+6x-5}{2x+3}.$$

**Bài 7.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$\text{a) } y = (x^3 - 6x + 9)(x^4 + x^2 - 1).$$

$$\text{b) } y = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)(\sqrt{x} - 1).$$

$$\text{c) } y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^3 - 2}.$$

$$\text{d) } y = (2x^3 - 3) \cdot \sin 3x.$$

$$\text{e) } y = \frac{\sin x - 2 \cos x}{x^2 - 1}.$$

$$\text{f) } y = x^3 \cdot \tan 2x + 2x - 1.$$

**Bài 8.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = (4x^3 + x^2 - 1)^4$$

$$\text{b) } y = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^6$$

$$\text{c) } y = \left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^4$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{(x^2 - 3x + 7)^3}$$

$$\text{e) } y = (x-2)\sqrt{x^2+1}$$

$$\text{f) } y = 2x - \sqrt[3]{2x^2+3x-1}$$

$$\text{g) } y = \frac{\sqrt{x^2+2}-2}{x}$$

$$\text{h) } y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+2}}$$

**Bài 9.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$

b)  $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

c)  $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

d)  $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

e)  $y = \frac{1}{x}\sqrt{4+x^2}$

f)  $y = \frac{2}{\sqrt{2+x^4+x^8}}$

**Bài 10.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = 2x \cos x - 3 \sin x$

b)  $y = x \cot x$

c)  $y = 4 \sin x + 5x \tan x - 2x$

d)  $y = \frac{x}{1-\cos x}$

e)  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

f)  $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$

g)  $y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$

h)  $y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

**Bài 11.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

a)  $y = x^2 \cdot \cos^5 x$

b)  $y = 3 \cdot \sin^2 2x - \cos^3 x$

c)  $y = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan 3x + x$

d)  $y = \sqrt{1 + 2 \cdot \tan(2x^2 + 3)}$

e)  $y = \sin^3 \sqrt{1+x^2}$

f)  $y = \cos \frac{2x}{x+1}$

**Bài 12.** 1) Cho hàm số  $f(x) = x \cdot (x+1)(x+2) \dots (x+100)$ . Tính  $f'(0)$  và  $f'(-1)$ .2) Cho hàm số  $f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7}$ . Tính  $f'(0)$ ,  $f'(\frac{\pi}{9})$  và  $f'(\pi)$ .**DẠNG 3. ĐẠO HÀM CẤP CAO****Bài 13.** Tính đạo hàm đến cấp đã chỉ ra của các hàm số sau: (với  $n$  là số tự nhiên)

a)  $y = x \cdot \sin 5x$ , tính  $y''$ .

b)  $y = \cos^2 x$ , tính  $y'''$ .

c)  $y = x^4 - 6x^3 + 7x - 8$ , tính  $y^{(n)}$ .

d)  $y = \frac{1}{ax+b}$  với  $a, b$  là các hằng số và  $a \neq 0$ , tính  $y^{(n)}$ .

e)  $y = \sin x$ , tính  $y^{(n)}$ .

f)  $y = \cos x$ , tính  $y^{(n)}$ .

**Câu 14.** 1. Cho  $A, B$  là hai số sao cho  $f(x) = \frac{x-5}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$  với  $\forall x \neq \pm 1$ . Tìm hai số  $A$  và  $B$ .Từ đó tính  $f^{(n)}(x)$ .2. Cho hàm số  $f(x) = \frac{5x-3}{x^2-3x+2}$ . Tìm  $a, b$  để  $\frac{5x-3}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$ . Từ đó tính  $y^{(n)}$ .3. Tìm đạo hàm cấp  $n$  của các hàm số sau:  $y = \frac{3x-4}{(x+2)(2x-1)}$ ;  $y = \frac{x^2-3x+2}{2x^2+x-1}$ .**Bài 15**

1. Cho hàm số  $y = x + \frac{5}{x}$ . Tính  $A = x.y' + y$
2. Cho hàm số  $y = x.\sin x$ . Tính  $B = x.y - 2(y' - \sin x) + x.y''$
3. Cho hàm số  $y = \sqrt{2x - x^2}$ . Tính  $C = y^3.y'' + 1$
4. Cho hàm số  $y = 3 + \frac{5}{x}$ . Tính  $D = x.y' + y$
5. Cho hàm số  $y = x.\cos x$ . Chứng minh rằng  $x.y + x.y'' = 2(y' - \cos x)$
6. Cho hàm số  $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^3$ . Chứng minh rằng  $(1 + x^2).y'' + x.y' - 9y = 0$

#### Bài 16.

1. Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{3x+1}{x-5}$ . Giải bất phương trình  $f'(x) > 0$ .
2. Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{5x + 1}$ . Giải bất phương trình  $f'(x) > 0$ .
3. Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{2 - 2x - x^2}{x^2 - 1}$ . Giải bất phương trình  $f'(x) < 0$ .
4. Cho hai hàm số  $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}$  và  $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$ .

Giải bất phương trình  $f'(x) > g'(x)$ .

**Bài 17.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 + 2m - 1$ . Tìm  $m$  để  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**Bài 18.** Cho hàm số  $g(x) = \frac{m}{2}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + (3-m)x - 2$ .

1. Tìm điều kiện của  $m$  để  $g'(x) > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Tìm điều kiện của  $m$  để  $g'(x) = 0$  có 2 nghiệm trái dấu.

**Bài 19.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 3$ .

1. Tìm  $m$  để  $f'(x)$  là bình phương của 1 nhị thức bậc nhất.
2. Tìm điều kiện của  $m$  để  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (0, 2)$ .
3. Tìm điều kiện của  $m$  để  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (0, +\infty)$ .

### DẠNG 5: BA BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN CƠ BẢN

#### Bài toán tiếp tuyến tại 1 điểm

#### Bài 20.

1. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ  $-2$  của đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2x^2$ .
2. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm  $A(0; 3)$  của đồ thị hàm số  $y = x + 1 - \frac{2}{2x-1}$ .

- Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm  $M(1; -7)$  của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+4}{2x-3}$ .
- Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm  $I(2; 2)$  của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ .
- Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ  $2\sqrt{3}$  của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ .

### Bài 21.

- Chứng minh rằng với mọi  $m$  đường thẳng  $y = x + m$  luôn cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{-x+1}{2x-1}$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ . Gọi  $k_1, k_2$  là hệ số góc của các tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại  $A, B$ . Tìm  $m$  để tổng  $k_1 + k_2$  đạt giá trị lớn nhất.
- Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 1$  cắt đường thẳng  $y = 1$  tại ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Giả sử  $C(0; 1)$ . Tìm  $m$  để các tiếp tuyến tại  $A, B$  vuông góc với nhau.

### Bài toán tiếp tuyến biết phương cho trước

#### Bài 22:

- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = -x^4 - x^2 + 6$  biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $y = \frac{1}{6}x - 1$ .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$  biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $y = x - 1$ .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-2}$  biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng  $-5$ .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$  biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3. Tìm tọa độ tiếp điểm.
- Tìm giao điểm của các tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-3}$  với trục hoành biết tiếp tuyến song song với đường thẳng  $y = 2001 - x$
- Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$  có đồ thị  $(C_m)$ . Điểm  $M \in (C_m)$  có hoành độ bằng  $-1$ . Tìm  $m$  để tiếp tuyến của  $(C_m)$  tại  $M$  song song với đường thẳng  $5x - y = 0$

### Bài toán tiếp tuyến đi qua một điểm

#### Bài 23:

- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ , biết tiếp tuyến đó đi qua điểm  $M(-1; -9)$ .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ , biết tiếp tuyến đó đi qua điểm  $A(-1; 3)$ .

- Viết phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$  đi qua điểm  $A(3;0)$ .
- Lập phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = (2-x^2)^2$  kẻ từ điểm  $A(0;4)$ . Tìm tọa độ các tiếp điểm.
- Viết phương trình các tiếp tuyến đi qua điểm  $E(6;4)$  tới đồ thị hàm số  $y = x + \frac{1}{x-2}$ .
- Chứng minh từ  $A(1;-1)$  kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc tới đồ thị hàm số  $y = x + \frac{1}{x+1}$ .

#### Bài 24

- Viết phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{5}{3}$  đi qua điểm  $M\left(-\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .
- Chứng minh rằng có hai tiếp tuyến của  $(P): y = x^2 - 3x$  đi qua điểm  $A\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$  và chúng vuông góc với nhau.

### DẠNG 6: TIẾP TUYẾN HOẶC TIẾP ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

#### Bài 25

- Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ . Tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất trong số tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số. Khi đó xác định tọa độ tiếp điểm.
- Tìm  $M$  thuộc đồ thị hàm số  $y = \frac{2x}{x+1}$  biết tiếp tuyến tại  $M$  cắt hai trục tọa độ tại hai điểm  $A, B$  sao cho tam giác  $OAB$  có diện tích bằng  $\frac{1}{4}$ .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+2}{2x+3}$  biết tiếp tuyến cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm  $A, B$  và tam giác  $OAB$  cân tại gốc tọa độ  $O$ .

#### Bài 26.

- Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 7x - 1$ . Tìm tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất trong số tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số.
- Cho hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + 1$  Gọi  $M$  là một điểm trên đồ thị hàm số mà tiếp tuyến tại điểm đó cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác cân tại  $O$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  biết  $x_M > 0$ .
- Cho hàm số  $y = 2 + \frac{1}{x+1}$ . Tìm các điểm  $M$  thuộc đồ thị hàm số mà tiếp tuyến tại điểm đó cắt hai trục tọa độ tại  $A, B$  sao cho diện tích tam giác  $OAB$  bằng  $\frac{1}{2}$ .
- Cho hàm số  $y = \frac{3x-1}{x-1}$  và điểm  $I(1;3)$ . Tìm các tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đó cắt hai đường thẳng  $x = 1; y = 3$  tạo hai điểm  $A, B$  sao cho tam giác  $IAB$  cân tại  $I$ .

5. Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{x+1}$  và điểm  $I(-1;1)$ . Tìm các tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết khoảng cách từ điểm  $I$  đến tiếp tuyến đó đạt giá trị lớn nhất.
6. Cho hàm số  $y = x+1 + \frac{1}{x-1}$  (C). Tìm các điểm  $A$  thuộc đồ thị hàm số (C) sao cho tiếp tuyến tại  $A$  cắt trục hoành, trục tung theo thứ tự  $M, N$  ( $M, N$  khác  $O$ ) sao cho  $ON = 2OM$ .
7. Cho hàm số  $y = x - \frac{1}{x}$ . Tìm điểm  $M$  thuộc đồ thị hàm số sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ đến tiếp tuyến tại điểm  $M$  bằng  $\frac{1}{2}$ .

## DẠNG 7: ĐIỀU KIỆN TIẾP XÚC CỦA HAI ĐỒ THỊ VÀ TIẾP TUYẾN CHUNG CỦA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

### Câu 27:

- Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai parabol  $y = x^2 - 5x + 6$ ,  $y = -x^2 + 5x - 11$ .
- Viết phương trình tiếp tuyến của mỗi parabol sau tại giao điểm chung của hai parabol  $y = 2x^2 - 9x + 2$ ,  $y = 2x^2 + 3x - 4$ . Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai parabol đó.

### Câu 28:

- Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$  tiếp xúc với đường thẳng  $y = x$ .
- Tìm hệ thức liên hệ giữa  $a, b$  để đường thẳng  $y = ax + b$  tiếp xúc với đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{x}$ .

### Câu 28:

- Tìm  $b$  để parabol số  $y = 2x^2 + b$  tiếp xúc với parabol  $y = (x^2 - 1)^2$ . Viết phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm tương ứng.
- Tìm  $a$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$  tiếp xúc với parabol  $y = x^2 + a$ .
- Tìm  $m$  để hai đường cong sau tiếp xúc:  
 $y = mx^3 - (m-1)x^2 + (m+1)x + 1, y = -mx^2 + (m-1)x - m$
- Tìm  $a$  để đồ thị hàm số  $y = 2x^3 - 3(a+3)x^2 + 18ax - 8$  tiếp xúc với trục hoành.
- Tìm  $a$  để đồ thị hàm số  $y = 8x + a$  tiếp xúc với đồ thị hàm số  $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ .
- Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + m}{x-1}, m \neq -1$  tiếp xúc với đường thẳng  $d: y = -x + 7$ .