Bài 01

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Câu 1. Ta có $0 \le \left|\dfrac{\sin 5n}{3n}\right| \le \dfrac{1}{n}$, mà $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim \dfrac{\sin 5n}{3n} = 0$, do đó $\lim \left(\dfrac{\sin 5n}{3n} - 2\right) = -2$.

Chọn A.

Nhận xét : Có thể dùng MTCT để tính (có thể chính xác hoặc gần đúng) giới hạn như sau (các bài sau có thể làm tương tự) :

Nhập $\dfrac{\sin(5X)}{3X} - 2$.

Bấm CALC và nhập 9999999999 (một số dòng MTCT khi bấm nhiều số « 9 » thì nó báo lỗi, khi đó ta cần bấm ít số « 9 » hơn.

Bấm « = » ta được kết quả (có thể gần đúng), sau đó chọn đáp án có giá trị gần đúng với kết quả hiện trên MTCT.

Câu 2. Ta có $\dfrac{n - 2\sqrt{n}\sin 2n}{2n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{n}\sin 2n}{n}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim \dfrac{\sqrt{n^k}\cos\dfrac{1}{n}}{n} = 0$.

Ta có $\lim \cos\dfrac{1}{n} = \cos 0 = 1$ nên bài toán trở thành tìm k sao cho

$\lim \dfrac{\sqrt{n^k}}{n} = \lim n^{\frac{k}{2}-1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{k}{2} - 1 < 0 \Leftrightarrow k < 2 \xrightarrow[k\in\mathbb{N}^*, k=3l]{}$ không tồn tại k (do k nguyên dương và chẵn). **Chọn A.**

Câu 3. Ta có $0 \le \left|\dfrac{3\sin n + 4\cos n}{n+1}\right| \le \dfrac{7}{n+1} \le \dfrac{7}{n} \to 0 \longrightarrow \lim \dfrac{3\sin n + 4\cos n}{n+1} = 0$. **Chọn B.**

Câu 4. Ta có

$$0 \le \left|\frac{n\cos 2n}{n^2+1}\right| \le \frac{n}{n^2+1} \le \frac{1}{n} \to 0 \longrightarrow \lim \frac{n\cos 2n}{n^2+1} = 0 \longrightarrow \lim\left(5 - \frac{n\cos 2n}{n^2+1}\right) = 5.$$ **Chọn C.**

Câu 5. Ta có $\lim\left(n^2 \sin\dfrac{n\pi}{5} - 2n^3\right) = \lim n^3\left(\dfrac{1}{n}.\dfrac{\sin n\pi}{5} - 2\right)$. Vì

$$\begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ 0 \le \left|\dfrac{1}{n}.\dfrac{\sin n\pi}{5}\right| \le \dfrac{1}{n} \to 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim\left(\dfrac{1}{n}.\dfrac{\sin n\pi}{5} - 2\right) = -2 < 0 \end{cases} \longrightarrow \lim n^3\left(\frac{1}{n}.\frac{\sin n\pi}{5} - 2\right) = -\infty.$$

Chọn A.

Câu 6. Ta có $0 \le \left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right| \le \dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{1}{n} \to 0 \longrightarrow \lim \dfrac{(-1)^n}{n+1} = 0 \longrightarrow \lim\left(4 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right) = 4$.

Chọn C.

Câu 7. Ta có $\begin{cases} 0 \le |u_n| \le \dfrac{1}{n^2+1} \le \dfrac{1}{n} \to 0 \\ 0 \le |v_n| \le \dfrac{1}{n^2+2} \le \dfrac{1}{n} \to 0 \end{cases} \longrightarrow \lim u_n = \lim v_n = 0 \longrightarrow \lim(u_n + v_n) = 0$.

Chọn B.

Chú ý : Cho $P(n), Q(n)$ lần lượt là các đa thức bậc m, k theo biến n :

$$P(x) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \ (a_m \neq 0)$$
$$Q(n) = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0 \ (b_k \neq 0)$$

Khi đó $\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \lim \dfrac{a_m n^m}{b_k n^k}$, viết tắt $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \sim \dfrac{a_m n^m}{b_k n^k}$, ta có các trường hợp sau :

Nếu « bậc tử » $<$ « bậc mẫu ($m < k$) thì $\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)} = 0.$

Nếu « bậc tử » $=$ « bậc mẫu ($m = k$) thì $\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \dfrac{a_m}{b_k}.$

Nếu « bậc tử » $>$ « bậc mẫu ($m > k$) thì $\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty & khi\ a_m b_k > 0 \\ -\infty & khi\ a_m b_k < 0 \end{cases}.$

Để ý rằng nếu $P(n), Q(n)$ có chứa « căn » thì ta vẫn tính được bậc của nó. Cụ thể $\sqrt[m]{n^k}$ tì có bậc là $\dfrac{k}{n}$. Ví dụ $\sqrt{n}$ có bậc là $\dfrac{1}{2}$, $\sqrt[3]{n^4}$ có bậc là $\dfrac{4}{3}$,...

Trong các bài sau ta có thể dùng dấu hiệu trên để chỉ ra kết quả một cách nhanh chóng !

Câu 8. Ta có $\lim \dfrac{-3}{4n^2 - 2n + 1} = \lim \dfrac{\frac{-3}{n^2}}{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{0}{4} = 0.$ **Chọn C.**

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 9. Ta có $\lim \dfrac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1} = \lim \dfrac{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \dfrac{0}{1} = 0.$ **Chọn D.**

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 10. Ta có $\lim \dfrac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1} = \lim \dfrac{\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{4 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \dfrac{0}{4} = 0.$ **Chọn B.**

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 11. Ta có $\lim \dfrac{n\sqrt{n} + 1}{n^2 + 2} = \lim \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \dfrac{0}{1} = 0.$ **Chọn D.**

Giải nhanh : $\dfrac{n\sqrt{n} + 1}{n^2 + 2} \sim \dfrac{n\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$

Câu 12. Ta có $\lim \dfrac{v_n}{u_n} = \lim \dfrac{n+1}{n+2} = \lim \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \dfrac{1}{1} = 1.$ **Chọn A.**

Giải nhanh : $\dfrac{n+1}{n+2} \sim \dfrac{n}{n} = 1.$

Câu 13. Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{an + 4}{5n + 3} = \lim \dfrac{a + \frac{4}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \dfrac{a}{5}.$ Khi đó

$$\lim u_n = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{5} = 2 \Leftrightarrow a = 10 \longrightarrow$$ **Chọn A.**

Giải nhanh : $2 \sim \frac{an+4}{5n+3} \sim \frac{an}{5n} = \frac{a}{5} \Leftrightarrow a = 10.$

Câu 14. Ta có $\lim u_n = \lim \frac{2n+b}{5n+3} = \lim \frac{2+\frac{b}{n}}{5+\frac{3}{n}} = \frac{2}{5} \ (\forall b \in \mathbb{R}) \longrightarrow$ **Chọn A.**

Giải nhanh : $\frac{2n+b}{5n+3} \sim \frac{2n}{5n} = \frac{2}{5}$ với mọi $b \in \mathbb{R}$.

Câu 15. Ta có $L = \lim \frac{n^2+n+5}{2n^2+1} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\frac{n^2+n+5}{2n^2+1} \sim \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$

Câu 16. $2 = \lim u_n = \lim \frac{4n^2+n+2}{an^2+5} = \lim \frac{4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{a+\frac{5}{n^2}} = \frac{4}{a} \ (a \neq 0) \Leftrightarrow a = 2.$ **Chọn D.**

Giải nhanh : $2 \sim \frac{4n^2+n+2}{an^2+5} \sim \frac{4n^2}{an^2} = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = 2.$

Câu 17. $L = \lim \frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2} = \lim \frac{\frac{1}{n}-3}{2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = \frac{-3}{2} \longrightarrow$ **Chọn A.**

Giải nhanh: $\frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2} \sim \frac{-3n^3}{2n^3} = -\frac{3}{2}.$

Câu 18. $L = \lim \frac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1} = \lim \frac{\frac{5}{n^2}-3a}{(1-a)+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}} = \frac{-3a}{(1-a)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<0 \\ a>1 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 19. Ta có

$$L = \lim \frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)} = \lim \frac{n^3\left(\frac{2}{n^2}-1\right).n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right).n^4\left(1-\frac{7}{n^4}\right)} = \lim \frac{\left(\frac{2}{n^2}-1\right)\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{7}{n^4}\right)} = \frac{-1.3}{2.1} = -\frac{3}{2}.$$

Chọn A.

Giải nhanh: $\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)} \sim \frac{-n^3.3n^2}{2n.n^4} = -\frac{3}{2}.$

Câu 20. $L = \lim \frac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)} = \lim \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n^3}\right)\left(4+\frac{5}{n}\right)}{\left(1-\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)\left(3-\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{1.2.4}{1.3} = \frac{8}{3}.$

Chọn C.

Giải nhanh: $\dfrac{\left(n^2+2n\right)\left(2n^3+1\right)(4n+5)}{\left(n^4-3n-1\right)\left(3n^2-7\right)} \sim \dfrac{n^2.2n^3.4n}{n^4.3n^2} = \dfrac{8}{3}.$

Câu 21. $L = \lim \dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+8}} = \lim \dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{8}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1}} = 1 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+8}} \sim \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}} = 1.$

Câu 22. $\lim \dfrac{n^3-2n}{1-3n^2} = \lim \dfrac{n^3\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(\dfrac{1}{n^2}-3\right)} = \lim n.\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-3}.$ Ta có

$$\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-3} = -\dfrac{1}{3} < 0 \end{cases} \longrightarrow \text{im}\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2} = \lim n.\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-3} = -\infty \longrightarrow \textbf{ Chọn C.}$$

Giải nhanh : $\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2} \sim \dfrac{n^3}{-3n^2} = -\dfrac{1}{3}n \longrightarrow -\infty.$

Câu 23. $\lim \dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1} = \lim \dfrac{n^3\left(\dfrac{2}{n^2}+3\right)}{n^2\left(4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim n.\dfrac{\dfrac{2}{n^2}+3}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}.$ Ta có

$$\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \dfrac{\dfrac{2}{n^2}+3}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{3}{4} > 0 \end{cases} \longrightarrow \text{im}\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1} = \lim n.\dfrac{\dfrac{2}{n^2}+3}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = +\infty. \textbf{ Chọn B.}$$

Giải nhanh : $\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1} \sim \dfrac{3n^3}{4n^2} = \dfrac{3}{4}.n \longrightarrow +\infty.$

Câu 24. $\lim \dfrac{3n-n^4}{4n-5} = \lim \dfrac{n^4\left(\dfrac{3}{n^3}-1\right)}{n\left(4-\dfrac{5}{n}\right)} = \lim n^3.\dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}}.$ Ta có

$$\begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim \dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}} = -\dfrac{1}{4} < 0 \end{cases} \longrightarrow \lim \dfrac{3n-n^4}{4n-5} = 1\lim n^3.\dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}} = -\infty. \textbf{ Chọn C.}$$

Giải nhanh : $\dfrac{3n-n^4}{4n-5} \sim \dfrac{-n^4}{4n} = -\dfrac{1}{4}.n^3 \longrightarrow -\infty.$

Câu 25. Theo dấu hiệu ở đã nêu ở phần **Chú ý** trên thì ta chọn giới hạn nào rơi vào trường hợp « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » !

$\lim \dfrac{3+2n^3}{2n^2-1} = +\infty$: « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » và $a_m b_k = 2.2 = 4 > 0.$

$\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}=0$: « bậc tử » $<$ « bậc mẫu ». **Chọn B.**

$\lim \dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1}=+\infty$: « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » và $a_n b_k=(-3).(-2)>0.$

$\lim \dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$: « bậc tử » $=$ « bậc mẫu » và $\dfrac{a_m}{b_k}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}.$

Câu 26. Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » $=$ « bậc mẫu » và $a_m b_k>0.$ **Chọn C.**

$$\lim u_n=\lim \frac{n^2-3n^3}{9n^3+n^2-1}=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}.$$

Câu 27. Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » với $a_m b_k>0.$ **Chọn A.**

$$\lim u_n=\lim \frac{1+n^2}{5n+5}=\lim n.\frac{\frac{1}{n^2}+1}{5+\frac{5}{n}}=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim \dfrac{\frac{1}{n^2}+1}{5+\frac{5}{n}}=\dfrac{a_m}{b_k}=\dfrac{1}{5}>0\end{cases}.$$

Các đáp án còn lại đều rơi vào trường hợp « bậc tử » $\le$ « bậc mẫu » nên cho kết quả hữa hạn.

Câu 28. Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » $=$ « bậc mẫu » và $a_m b_k<0.$ **Chọn C.**

$u_n=\dfrac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$: « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » và $a_m b_k=-3.2=-6<0\longrightarrow \lim u_n=-\infty.$

> **Chú ý :** (i) $\lim\left(a_m n^m+a_{n-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0\right)=\begin{cases}+\infty & khi\ a_n>0\\ -\infty & khi\ a_n<0\end{cases}.$
>
> (ii) Giả sử $|q|>\max\left\{|q_i|:i=1;2\ldots;m\right\}$ thì
>
> $$\lim\left(a.q^n+a_m q_m^n+\cdots+a_1 q_1^n+a_0\right)=\begin{cases}a_0 & khi\ |q|<1\\ +\infty & khi\ \ a>0,\ q>1.\\ -\infty & khi\ a<0,\ q>1\end{cases}$$
>
> Ta dùng « dấu hiệu nhanh » này để đưa ra kết quả nhanh chóng cho các bài sau.

Câu 29. $L=\lim\left(3n^2+5n-3\right)=\lim n^2\left(2+\dfrac{5}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim n^2=+\infty\\ \lim\left(2+\dfrac{5}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)=2>0\end{cases}.$ **Chọn D.**

Giải nhanh : $3n^2+5n-3\sim 3n^2\longrightarrow+\infty.$

Câu 30. Ta có $\lim\left(5n-3\left(a^2-2\right)n^3\right)=\lim n^3\left(\dfrac{5}{n^2}-3\left(a^2-2\right)\right)=-\infty$

$\Leftrightarrow \lim\left(\dfrac{5}{n^2}-3\left(a^2-2\right)\right)=a^2-2<0\Leftrightarrow-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}\xrightarrow[a\in\mathbb{Z},a\in(-10;10)]{}a=-1;\ 0;\ 1.$ **Chọn B.**

Câu 31. Ta có

$$\lim\left(3n^4+4n^2-n+1\right)=\lim n^4\left(3+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim n^4=+\infty\\ \lim\left(3+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}\right)=3>0\end{cases}.$$

Chọn D.

Giải nhanh : $3n^4+4n^2-n+1\sim 3n^4\longrightarrow+\infty.$

Câu 32. Vì $\sqrt{2},\left(\sqrt{2}\right)^2,\ldots,\left(\sqrt{2}\right)^n$ lập thành cấp số nhân có $u_1=\sqrt{2}=q$ nên

$$u_n=\sqrt{2}.\frac{1-\left(\sqrt{2}\right)^n}{1-\sqrt{2}}=\left(2-\sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{2}\right)^n-1\right]\longrightarrow \lim u_n=+\infty \text{ vì } \begin{cases}a=2-\sqrt{2}>0\\ q=\sqrt{2}>1\end{cases}.$$ **Chọn C.**

Câu 33. Ta có $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{2}.\frac{n(n+1)}{2}$. Do đó

$$\lim\frac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}}{n^2+1}=\lim\frac{n^2+n}{4n^2+4}=\frac{1}{4}$$ ("bậc tử" $=$ "bậc mẫu"). **Chọn D.**

Câu 34. Ta có $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n-1)=\frac{1}{n^2}.\frac{(n-1)(1+n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2n^2}$. Do đó

$$\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$ **Chọn C.**

Câu 35. Ta có $1+3+5+\cdots(2n-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$ nên

$$\lim\left(\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}\right)=\lim\frac{n^2}{3n^2+4}=\frac{1}{3}\longrightarrow$$ **Chọn B.**

Câu 36. Ta có

$$\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Chọn B.

Câu 37. Với mọi $k\in\mathbb{N}^*$ thì $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$, do đó

$$\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\lim\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$$
$$=\lim\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{1}{2}.$$

Chọn A.

Câu 38. Ta có

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+......+\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n+3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

Do đó $\lim\left(\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+......+\frac{1}{n(n+3)}\right)=\lim\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{11}{8}$. **Chọn A.**

Câu 39. Đặt $P(n)=\frac{2n^3-3n^2+n}{6}=\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$ thì ta có

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\big(P(2)-P(1)\big)+\big(P(3)-P(2)\big)+\cdots+\big(P(n+1)-P(n)\big)$$
$$=P(n+1)-P(1)=\frac{n(n+1)(2n+3)}{6}$$

Do đó $\lim\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n\left(n^2+1\right)}=\lim\frac{n(n+1)(2n+3)}{6n\left(n^2+1\right)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. **Chọn D.**

Câu 40. Giả sử $\lim u_n=a$ thì ta có

$$a=\lim u_{n+1}=\lim\frac{1}{2-u_n}=\frac{1}{2-a}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 2\\ a(2-a)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 2\\ a^2-2a+1=0\end{cases}\Leftrightarrow a=1.$$ **Chọn D.**

Câu 41. Giả sử $\lim u_n=a$ thì ta có

$$a=\lim u_{n+1}=\lim\frac{u_n+1}{2}=\frac{a+1}{2}\Leftrightarrow a=1\longrightarrow$$ **Chọn A.**

Câu 42. $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}=\lim\frac{\sqrt{9-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{4-\frac{2}{n}}=\frac{3}{4}\longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}\sim\frac{\sqrt{9n^2}}{4n}=\frac{3}{4}$.

Câu 43. $\lim\frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}=\lim\frac{-1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{3+\frac{2}{n^4}}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\longrightarrow$ **Chọn C.**

Giải nhanh : $\frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}\sim\frac{-n^2}{\sqrt{3n^4}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 44. $\lim\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n}+5}=\lim\frac{\sqrt{2+\frac{3}{n}}}{\sqrt{2}+\frac{5}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$. **Chọn D.**

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n}+5}\sim\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}}=1$.

Câu 45. $\lim\frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}=\lim\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{0}{1}=0\longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}\sim\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$.

Câu 46. Ta có $\lim\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n}-2}=\lim\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}-\frac{2}{n}}=\frac{1+\sqrt{1}}{1}=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$

$\longrightarrow\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\ b=0\end{cases}\longrightarrow S=8\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 47. $\lim\dfrac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}=\lim\dfrac{\dfrac{10}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}}=\dfrac{0}{1}=0.$ **Chọn C.**

Giải nhanh: $\dfrac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}\sim\dfrac{10}{\sqrt{n^4}}=\dfrac{10}{n^2}\longrightarrow 0.$

Câu 48. $\lim(n+1)\sqrt{\dfrac{2n+2}{n^4+n^2-1}}=\lim\sqrt{\dfrac{2(n+1)^3}{n^4+n^2-1}}=0$ ("bậc tử" $<$ "bậc mẫu"). **Chọn C.**

Giải nhanh: $(n+1)\sqrt{\dfrac{2n+2}{n^4+n^2-1}}\sim n.\sqrt{\dfrac{2n}{n^4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0.$

Câu 49. Ta có $\lim\dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}=\lim\dfrac{\sqrt[3]{a+\dfrac{5}{n}-\dfrac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}=\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}$

$=b\sqrt{3}+c\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{a}=\dfrac{b}{3}\\ c=0\end{cases}\Rightarrow P=\dfrac{1}{3}.$ **Chọn B.**

Câu 50. Ta có

$$\lim\sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}=\lim n\left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5}-3+\frac{2}{n^3}}\right)=-\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\left(\sqrt[5]{\dfrac{200}{n^5}-3+\dfrac{2}{n^3}}\right)=-\sqrt[5]{3}<0\end{cases}.$$

Chọn D.

Giải nhanh: $\sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}\sim\sqrt[5]{-3n^5}=-\sqrt[5]{3}.n\longrightarrow-\infty.$

Câu 51. $\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\sim\sqrt{n}-\sqrt{n}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)=\lim\frac{4}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}}=0\longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Câu 52. $\sqrt{n^2-n+1}-n\sim\sqrt{n^2}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)=\lim\frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}=\lim\frac{-1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}=-\frac{1}{2}\longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-n+1}-n=\dfrac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}\sim\dfrac{-n}{\sqrt{n^2}+n}=-\dfrac{1}{2}.$

Câu 53. $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)=\lim n\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{3+\dfrac{2}{n^2}}\right)=-\infty$ vì

$$\lim n=+\infty,\ \lim\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}\right)=1-\sqrt{3}<0.\ \textbf{Chọn C.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{3n^2}=\left(1-\sqrt{3}\right)n\longrightarrow-\infty.$

Câu 54. $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=2.$$ **Chọn B.**

Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}=\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}\sim\dfrac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=2.$

Câu 55. $\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=\lim\dfrac{\left(a^2-a-2\right)n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

$$=\lim\frac{a^2-a-2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{a^2-a-2}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\b=2\end{array}\right..$$ **Chọn B.**

Câu 56. $\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\sim\sqrt{2n^2}-\sqrt{2n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)=\lim\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}$$

$$=\lim\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Chọn B.

Giải nhanh :

$$\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}=\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}\sim\frac{2n}{\sqrt{2n^2}+\sqrt{2n^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 57. Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{2n^2}=\left(1-\sqrt{2}\right)n\longrightarrow-\infty.$

Cụ thể : $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)=\lim n.\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{n}}\right)=-\infty$ vì

$$\lim n=+\infty,\ \lim\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{n}}\right)=1-\sqrt{2}<0\longrightarrow$$ **Chọn C.**

Câu 58. Nếu $\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\sim\sqrt{n^2}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=\lim\dfrac{\left(2a^2-8\right)n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{2a^2-8}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

$=a^2-4=0\Leftrightarrow a=\pm2.$ **Chọn B.**

Câu 59. $\sqrt{n^2-2n+3}-n\sim\sqrt{n^2}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)=\lim\frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=-1\longrightarrow$$ **Chọn A.**

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-2n+3}-n=\dfrac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}\sim\dfrac{-2n}{\sqrt{n^2}+n}=-1.$

Câu 60. $\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$-1=\lim u_n=\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim\frac{a+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=-2.$$

Chọn C.

Giải nhanh :

$$-1\sim\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}=\frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}\sim\frac{an}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=-2.$$

Câu 61. $\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\sim\sqrt[3]{n^3}-\sqrt[3]{n^3}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)=\lim\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}.\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{\left(n^3+2\right)}}=0.\longrightarrow \textbf{Chọn C.}$$

Câu 62. $\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\sim\sqrt[3]{-n^3}+n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=\lim\frac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-1}+1}=\frac{1}{3}.$$

Chọn A.

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^2-n^3}+n=\dfrac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}\sim\dfrac{n^2}{\sqrt[3]{n^6}-n\sqrt[3]{-n^3}+n^2}=\dfrac{1}{3}.$

Câu 63. $\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\sim\sqrt[3]{n^3}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)=\lim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n.\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}=\lim\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=-\frac{2}{3}.$$

Chọn B.

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n=\dfrac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n.\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}\sim\dfrac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^6}+n.\sqrt[3]{n^3}+n^2}=-\dfrac{2}{3}.$

Câu 64. $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\sim\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1\longrightarrow \textbf{Chọn D.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\sim\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=1.$

Câu 65. $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sim\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}\longrightarrow \textbf{Chọn B.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}.$

Câu 66. $n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)\sim n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}=2\longrightarrow \textbf{Chọn B.}$$

Giải nhanh : $n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}\sim\dfrac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=2.$

Câu 67. $n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)\sim n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)=\lim\frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}}$$

$$=\lim\frac{7}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}}}=\frac{7}{2}.$$

Chọn C.

Giải nhanh : $n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)=\dfrac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}}\sim\dfrac{7n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\dfrac{7}{2}.$

Câu 68. $\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}=\lim-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right)=\lim n.\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)\right]=-\infty$$

$$\text{vì }\lim n=+\infty,\ \lim\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)\right]=-1<0\longrightarrow \textbf{Chọn C.}$$

Giải nhanh :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right)\sim-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}\right)=-n\longrightarrow-\infty.$$

Câu 69. $\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}\sim\sqrt{9n^2}=3n\neq 0\longrightarrow$ giải nhanh :

$$\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}\sim\frac{\sqrt{9n^2}}{3n}=1\longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Cụ thể : $\lim\dfrac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}=\lim\dfrac{\sqrt{9-\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}}=\dfrac{\sqrt{9}}{3}=1.$

Câu 70. $\sqrt[3]{n^3+1}-n\sim\sqrt[3]{n^3}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=0\longrightarrow \textbf{Chọn B.}$$

Câu 71. Giải nhanh : $\dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}\sim\dfrac{-5^{n+2}}{2.5^n}=-\dfrac{25}{2}\longrightarrow$ **Chọn A.**

Cụ thể : $\lim\dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}=\lim\dfrac{2\left(\frac{1}{5}\right)^n-25}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+2}=-\dfrac{25}{2}.$

Câu 72. Giải nhanh : $\dfrac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}\sim\dfrac{-2.5^{n+1}}{5^n}=-10\longrightarrow$ **Chọn B.**

Cụ thể : $\lim\dfrac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-10}{2.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+1}=-10.$

Câu 73. Giải nhanh : $\dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}\sim\dfrac{3^n}{4^n}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\longrightarrow 0.$ **Chọn A.**

Cụ thể : $\lim\dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-8.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-3.\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1}=\dfrac{0}{1}=0.$

Câu 74. Giải nhanh : $\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}\sim\dfrac{3^n}{-2.3^n}=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow$ **Chọn B.**

Cụ thể : $\lim\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}=\lim\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=-\dfrac{1}{2}.$

Câu 75. Giải nhanh :

$$\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\frac{2n^2+3}{n^2-1}\sim\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n}{\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}+\frac{2n^2}{n^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}+2=\frac{\sqrt{5}}{5}+2\longrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=5\\ c=2\end{cases}.$$

Vậy $S=1^2+5^2+2^2=30.$ **Chọn B.**

Cụ thể : $\lim\left(\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}++\dfrac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\lim\left(\dfrac{1-2.\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}{5.\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\sqrt{5}-.\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}+\dfrac{2+\dfrac{3}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2=\dfrac{\sqrt{5}}{5}+2.$

Câu 76. Giải nhanh: $\dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\dfrac{\pi^n+3^n+4^n}{3\pi^n-3^n+4.4^n}\sim\dfrac{4^n}{4.4^n}=\dfrac{1}{4}\longrightarrow$ **Chọn D.**

Cụ thể : $\lim\dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1}{3.\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n-3.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4}=\dfrac{1}{4}.$

Câu 77. Giải nhanh : Vì $3>\sqrt{5}$ nên $3^n-\sqrt{5}^n\sim 3^n\longrightarrow+\infty$. **Chọn D.**

Cụ thể : $\lim\left[3^n-\sqrt{5}^n\right]=\lim 3^n\left(1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^n\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim 3^n=+\infty\\ \lim 1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^n=1>0\end{cases}.$

Câu 78. Giải nhanh : $3^4.2^{n+1}-5.3^n\sim-5.3^n=-\infty\ (-5<0).\longrightarrow$ **Chọn C.**

Cụ thể : $\lim\left(3^4.2^{n+1}-5.3^n\right)=\lim 3^n\left(162.\left(\frac{2}{3}\right)^n-5\right)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim 3^n=+\infty\\ \lim\left(162.\left(\frac{2}{3}\right)^n-5\right)=-5<0\end{cases}$.

Câu 79. Giải nhanh : $\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}\sim\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\longrightarrow 0$. **Chọn A.**

Cụ thể : $0\le\left|\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}\right|\le\frac{8.3^{n+1}}{4^n}=24.\left(\frac{3}{4}\right)^n\to 0\longrightarrow\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}=0.$

Câu 80. Ta có $2^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Rightarrow 2^n\ge C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\sim\frac{n^3}{6}\Rightarrow\begin{cases}\frac{n}{2^n}\to 0\\ \frac{2^n}{n^2}\to+\infty\end{cases}$. Khi đó:

$$\lim\frac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}=\lim\frac{2^n}{n^2}.\frac{2+3.\frac{n}{2^n}+10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\frac{2^n}{n^2}=+\infty\\ \lim\frac{2+3.\frac{n}{2^n}+10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{3}>0\end{cases}.$$

Chọn A.

Câu 81. Giải nhanh: $\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+2}}}\sim\sqrt[4]{\frac{4^n}{4^{n+a}}}=\frac{1}{2^a}\le\frac{1}{1024}\Leftrightarrow 2^a\ge 1024=2^{10}\Leftrightarrow a\ge 10.$

Mà $a\in(0;2018)$ và $a\in\mathbb{Z}$ nên $a\in\{10;2017\}\longrightarrow$ có 2008 giá trị a. **Chọn B.**

Cụ thể : $\lim\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}=\lim\sqrt[4]{\frac{1+2.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+4^a}}=\sqrt{\frac{1}{4^a}}=\sqrt{\frac{1}{\left(2^a\right)^2}}=\frac{1}{2^a}.$

Câu 82. Ta có $\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)=\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\lim\frac{(-1)^n}{3^n}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\\ 0\le\left|\frac{(-1)^n}{3^n}\right|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n\to 0\Rightarrow\lim\frac{(-1)^n}{3^n}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)=\frac{1}{3}.$$ **Chọn C.**

Câu 83. $\lim\left(\frac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\lim\left(\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}+\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}}\right)$. Ta có :

$$\begin{cases}\lim\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\\ 0\le\left|\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}-1}\to 0\Rightarrow\lim\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\frac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\sqrt{3}.$$

Chọn B.

Câu 84. Ta có $\begin{cases} \lim \dfrac{an^2-1}{3+n^2} = \lim \dfrac{a-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n^2}+1} = a \\ \lim \dfrac{1}{2^n} = \lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}} = \sqrt{3+a}.$

Ta có $\begin{cases} a \in (0;20),\ a \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{a+3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow a \in \{1;6;13\}$. **Chọn B.**

Câu 85. Ta có $\lim \sqrt{2.3^n - n + 2} = \lim \sqrt{3^n}.\sqrt{2-\dfrac{n}{3^n}+2.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$. Vì

$$\left.\begin{matrix} \lim \sqrt{3^n} = +\infty \\ 0 \le \dfrac{n}{3^n} \le \dfrac{n}{C_n^2} = \dfrac{n}{\dfrac{n(n-1)}{2}} = \dfrac{2}{n-1} \to 0 \Rightarrow \lim \dfrac{n}{3^n} = 0 \\ \lim \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \begin{cases} \lim \sqrt{3^n} = +\infty \\ \lim \sqrt{2-\dfrac{n}{3^n}+2.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n} = \sqrt{2} > 0 \end{cases},$$

do đó $\lim \sqrt{2.3^n - n + 2} = +\infty$. **Chọn D.**

Câu 86. Gọi q là công bội của cấp số nhân, ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q} = 2 \\ S_3 = u_1.\dfrac{1-q^3}{1-q} = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2(1-q) \\ 2(1-q^3) = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\dfrac{1}{2} \\ u_1 = 2\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = 3 \end{cases}.$$ **Chọn A.**

Câu 87. Ta có

$$S = 9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-3}}+\cdots = 9\left(\underbrace{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\, q=\frac{1}{3}}\right) = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{27}{2}.$$

Chọn A.

Câu 88. Ta có

$$S = \sqrt{2}\left(\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2\sqrt{2}.$$ **Chọn C.**

Câu 89. Ta có

$$S = 1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots = \underbrace{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\frac{2}{3}} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$ **Chọn A.**

Câu 90. Ta có :

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2.3^{n-1}}+\cdots=\frac{1}{2}\left(\underbrace{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}}_{CSN\ lvh: u_1=1,\ q=-\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{8}.$$ **Chon D.**

Câu 91. Ta có

$$S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$$

$$=\left(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=q=\frac{1}{2}}\right)-\left(\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots}_{CSN\ lvh: u_1=q=\frac{1}{3}}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Chọn D.

Câu 92. Ta có $1+a+a^2+\ldots+a^n$ là tổng $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là 1 và công bội là a, nên $1+a+a^2+\ldots+a^n=\dfrac{1.\left(1-a^{n+1}\right)}{1-a}=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Tương tự: $1+b+b^2+\ldots+b^n=\dfrac{1\left(1-b^{n+1}\right)}{1-b}=\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$.

Do đó $\lim\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}=\lim\dfrac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\lim\dfrac{1-b}{1-a}.\dfrac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\dfrac{1-b}{1-a}\ \left(|a|<1,|b|<1\right)$.

Chọn B.

Câu 93. Ta có

$$S=\underbrace{1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots+\cos^{2n} x+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\cos^2 x}=\frac{1}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}.$$ **Chọn C.**

Câu 94. Ta có

$$S=\underbrace{1-\sin^2 x+\sin^4 x-\sin^6 x+\cdots+(-1)^n.\sin^{2n} x+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=-\sin^2 x}=\frac{1}{1+\sin^2 x}.$$ **Chọn C.**

Câu 95. Ta có $\tan\alpha\in(0;1)$ với mọi $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, do đó

$$S=\underbrace{1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+\ldots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,q=-\tan\alpha}=\frac{1}{1+\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}.$$ **Chọn B.**

Câu 96. Ta có $\begin{cases}M=\dfrac{1}{1-m}\\ N=\dfrac{1}{1-n}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1-\dfrac{1}{M}\\ n=1-\dfrac{1}{N}\end{cases}$, khi đó

$$A=\frac{1}{1-mn}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{M}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)}=\frac{MN}{M+N-1}.$$ **Chọn A.**

Câu 97. Ta có $0,5111\cdots=0,5+10^{-2}+10^{-3}+\cdots+10^{-n}+\cdots$