

Mục lục

Phần A. CÂU HỎI	2
Dạng 1. Tiếp cận với khai triển nhị thức newton	2
Dạng 2. Tìm hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức newton.....	3
Dạng 2.1 Khai triển của 1 biểu thức.....	3
Dạng 2.1.1 Bài toán tìm hệ số của số hạng	3
Dạng 2.1.2 Bài toán tìm số hạng thứ k	4
Dạng 2.1.3 Bài toán tìm hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức có thêm điều kiện n	5
Dạng 2.1.4 Số hạng không chứa x (số hạng độc lập)	8
Dạng 2.2 Khai triển của nhiều biểu thức	11
Dạng 2.2.1 Dạng $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$	11
Dạng 2.2.2 Tổng $(a_1 + b_1)^n + (a_2 + b_2)^m + \dots + (a_k + b_k)^h$	12
Dạng 2.2.3 Tích $(a_1 + \dots + a_n)^m \cdot (b_1 + \dots + b_n)^l$	12
Dạng 2.2.4 Dạng kết hợp tích và tổng.....	13
Dạng 3. Ứng dụng nhị thức newton để giải toán.....	13
Phần B. LỜI GIẢI THAM KHẢO	14
Dạng 1. Tiếp cận với khai triển nhị thức newton	14
Dạng 2. Tìm hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức newton.....	16
Dạng 2.1 Khai triển của 1 biểu thức.....	16
Dạng 2.1.1 Bài toán tìm hệ số của số hạng	16
Dạng 2.1.2 Bài toán tìm số hạng thứ k	18
Dạng 2.1.3 Bài toán tìm hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức có thêm điều kiện n	20
Dạng 2.1.4 Số hạng không chứa x (số hạng độc lập)	27
Dạng 2.2 Khai triển của nhiều biểu thức	31
Dạng 2.2.1 Dạng $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$	31
Dạng 2.2.2 Tổng $(a_1 + b_1)^n + (a_2 + b_2)^m + \dots + (a_k + b_k)^h$	33
Dạng 2.2.3 Tích $(a_1 + \dots + a_n)^m \cdot (b_1 + \dots + b_n)^l$	35
Dạng 2.2.4 Dạng kết hợp tích và tổng.....	35
Dạng 3. Ứng dụng nhị thức newton để giải toán.....	36

Phần A. CÂU HỎI

Dạng 1. Tiếp cận với khai triển nhị thức newton

- Câu 1.** (THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ - HÒA BÌNH - 2018) Số số hạng trong khai triển $(x+2)^{50}$ là
A. 49. B. 50. C. 52. D. 51.
- Câu 2.** (HỒNG QUANG - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Có bao nhiêu số hạng trong khai triển nhị thức $(2x-3)^{2018}$
A. 2019. B. 2017. C. 2018. D. 2020.
- Câu 3.** (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu-ton $(x-y)^5$.
A. $x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$. B. $x^5 - 5x^4y - 10x^3y^2 - 10x^2y^3 - 5xy^4 + y^5$.
C. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$. D. $x^5 + 5x^4y - 10x^3y^2 + 10x^2y^3 - 5xy^4 + y^5$.
- Câu 4.** (Chuyên Nguyễn Huệ - Hà Nội -HK1 2018 - 2019) Trong khai triển nhị thức Niu-ton của $(3-2x)^{2019}$ có bao nhiêu số hạng?
A. 2019. B. 2018. C. 2020. D. 2021.
- Câu 5.** Từ khai triển biểu thức $(x+1)^{10}$ thành đa thức. Tổng các hệ số của đa thức là
A. 1023. B. 512. C. 1024. D. 2048.
- Câu 6.** (Lương Thế Vinh - Kiểm tra giữa HK1 lớp 11 năm 2018 - 2019) Từ khai triển biểu thức $(x+1)^{10}$ thành đa thức. Tổng các hệ số của đa thức là
A. 1023. B. 512. C. 1024. D. 2048.
- Câu 7.** (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - GIA LAI - LẦN 2 - 2018) Tính tổng các hệ số trong khai triển $(1-2x)^{2018}$.
A. -1. B. 1. C. -2018. D. 2018.
- Câu 8.** (THPT TRẦN NHÂN TÔNG - QN - LẦN 1 - 2018) Khai triển $(\sqrt{5} - \sqrt[4]{7})^{124}$. Có bao nhiêu số hạng hữu tỉ trong khai triển trên?
A. 30. B. 31. C. 32. D. 33.
- Câu 9.** (LƯƠNG TÀI 2 BẮC NINH LẦN 1-2018-2019) Trong khai triển nhị thức newton của $P(x) = (\sqrt[3]{2x+3})^{2018}$ thành đa thức, có tất cả có bao nhiêu số hạng có hệ số nguyên dương?
A. 673. B. 675. C. 674. D. 672.
- Câu 10.** (Độ Cẩn Vĩnh Phúc-lần 1-2018-2019) Trong khai triển $(1-2x)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$. Giá trị của $a_0 - a_1 + a_2$ bằng
A. 801. B. 800. C. 1. D. 721.
- Câu 11.** (Chuyên Lê Thánh Tông-Quảng Nam-2018-2019) Có bao nhiêu số hạng là số nguyên trong khai triển của biểu thức $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5})^{2019}$?
A. 136. B. 403. C. 135. D. 134.

Câu 12. (Gia Bình I Bắc Ninh - L3 - 2018) Trong khai triển của $\left(x^{\frac{1}{15}}y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{5}}\right)^{2019}$, số hạng mà lũy thừa của x và y bằng nhau là số hạng thứ bao nhiêu của khai triển?
A. 1348. B. 1346. C. 1345. D. 1347.

Câu 13. (SGD&ĐT BẮC NINH - 2018) Cho khai triển $(1-2x)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x_{20}$. Giá trị của $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$ bằng:
A. 1. B. 3^{20} . C. 0. D. -1.

Dạng 2. Tìm hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức newton

Dạng 2.1 Khai triển của 1 biểu thức

Dạng 2.1.1 Bài toán tìm hệ số của số hạng

Câu 14. (Chuyên Thái Bình lần 2 - 2018-2019) Hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển nhị thức $\left(x - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{12}$ (với $x > 0$) là:
A. 376. B. -264. C. 264. D. 260.

Câu 15. (HKI CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG 2018-2019) Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển nhị thức $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{13}$, (với $x \neq 0$).
A. 1716. B. 68. C. -176. D. 286.

Câu 16. (HỌC KỲ I ĐAN PHƯỢNG HÀ NỘI 2017 - 2018) Hệ số của x^{31} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$, $x \neq 0$ là.
A. C_{40}^4 . B. C_{40}^2 . C. C_{40}^3 . D. C_{40}^5 .

Câu 17. (HKI_L11-NGUYỄN GIA THIỀU - HÀ NỘI 1718) Hệ số lớn nhất trong khai triển $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^4$
A. $\frac{27}{128}$. B. $\frac{9}{32}$. C. $\frac{27}{32}$. D. $\frac{27}{64}$.

Câu 18. (HKI-Chu Văn An-2017) Cho biết hệ số của x^2 trong khai triển $(1+2x)^n$ bằng 180. Tìm n .
A. $n = 8$. B. $n = 12$. C. $n = 14$. D. $n = 10$.

Câu 19. (HKI-Chu Văn An-2017) Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(1+x)^{10}$.
A. 90. B. 720. C. 120. D. 45.

Câu 20. (HKI - TRIỆU QUANG PHỤC 2018-2019) Tìm hệ số h của số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^7$.
A. $h = 84$. B. $h = 672$. C. $h = 560$. D. $h = 280$.

- Câu 21. (HKI-Chuyên Hà Nội - Amsterdam 2017-2018)** Hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển Newton $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$ là
- A. -3640. B. 3640. C. 455. D. -1863680
- Câu 22. (Lương Thế Vinh - Kiểm tra giữa HK1 lớp 11 năm 2018 - 2019)** Tìm hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$.
- A. 58690. B. 4004. C. 3003. D. 5005.
- Câu 23. (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN 1_2018-2019)** Cho khai triển $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ với $x > 0$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển trên
- A. 80. B. 160. C. 240. D. 60.
- Câu 24. (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN 1_2018-2019)** Cho khai triển $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ với $x > 0$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển trên
- A. 80. B. 160. C. 240. D. 60.
- Câu 25. (Lương Thế Vinh - Kiểm tra giữa HK1 lớp 11 năm 2018 - 2019)** Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1 - 3x)^n$ là 90. Tìm n .
- A. $n = 7$. B. $n = 6$. C. $n = 8$. D. $n = 5$.

Dạng 2.1.2 Bài toán tìm số hạng thứ k

- Câu 26. (HKI_L11-NGUYỄN GIA THIỀU - HÀ NỘI 1718)** Số hạng thứ 13 trong khai triển $(2 - x)^{15}$ bằng?
- A. $3640x^{13}$. B. $3640x^{12}$. C. $-420x^{12}$. D. 3640.
- Câu 27. (DHSP HÀ NỘI HKI 2017-2018)** Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{2x}\right)^9$.
- A. $-\frac{1}{8}C_9^3x^3$. B. $\frac{1}{8}C_9^3 \cdot x^3$. C. $-C_9^3 \cdot x^3$. D. $C_9^3x^3$.
- Câu 28. (Chuyên Nguyễn Huệ - Hà Nội -HK1 2018 - 2019)** Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$.
- A. $-C_{13}^3$. B. $-C_{13}^3x^7$. C. $-C_{13}^4x^7$. D. $-C_{13}^4$.
- Câu 29. (TRƯỜNG THPT THANH THỦY 2018 -2019)** Tìm số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$?
- A. $C_{40}^4x^{31}$. B. $-C_{40}^{37}x^{31}$. C. $C_{40}^{37}x^{31}$. D. $C_{40}^3x^{31}$.
- Câu 30. (Lương Thế Vinh - Kiểm tra giữa HK1 lớp 11 năm 2018 - 2019)** Số hạng chứa x^{34} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{40}$ là

A. $-C_{40}^{37}x^{34}$.

B. $C_{40}^3x^{34}$.

C. $C_{40}^2x^{34}$.

D. $C_{40}^4x^{34}$.

Câu 31. (HỌC KÌ 1- LỚP 11- KIM LIÊN HÀ NỘI 18-19) Biết hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển $(1+4x)^n$ là 3040. Số tự nhiên n bằng bao nhiêu?

A. 28.

B. 26.

C. 24.

D. 20.

Câu 32. (THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH - PHÚ YÊN - 2018) Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ là 90. Tìm n .

A. $n=5$.

B. $n=8$.

C. $n=6$.

D. $n=7$.

Câu 33. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018) Cho biết hệ số của x^2 trong khai triển $(1+2x)^n$ bằng 180. Tìm n .

A. $n=12$.

B. $n=14$.

C. $n=8$.

D. $n=10$.

Câu 34. (THPT CHUYÊN NGŨ - HÀ NỘI - 2018) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển của biểu thức $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5$.

A. -810.

B. 826.

C. 810.

D. 421.

Câu 35. (THPT HẢI AN - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

A. C_{40}^{37} .

B. C_{40}^{31} .

C. C_{40}^4 .

D. C_{40}^2 .

Câu 36. (SỞ GD&ĐT LÀO CAI - 2018) Trong khai triển $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$, hệ số của x^3 ($x > 0$) là:

A. 80.

B. 160.

C. 240.

D. 60.

Dạng 2.1.3 Bài toán tìm hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức có thêm điều kiện n

Câu 37. (HKI-Chuyên Hà Nội - Amsterdam 2017-2018) Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^0 + 2.C_n^1 + 2^2.C_n^2 + \dots + 2^n.C_n^n = 59049$. Biết số hạng thứ 3 trong khai triển Newton của $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^n$ có giá trị bằng $\frac{81}{2}n$. Khi đó giá trị của x bằng

A. 1

B. 2.

C. ± 1

D. ± 2 .

Câu 38. (HKI-Nguyễn Gia Thiệu 2018-2019) Cho nhị thức $\left(2x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$, trong đó số nguyên dương n thỏa mãn $A_n^3 = 72n$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển.

A. $2^6 C_{10}^4 x^5$.

B. $2^5 C_{10}^5 x^5$.

C. $2^7 C_{10}^3 x^5$.

D. $2^6 C_{10}^7 x^5$.

Câu 39. (HKI - TRIỆU QUANG PHỤC 2018-2019) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^n$ ($x \neq 0$), biết rằng $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + \dots + n.C_n^n = 256n$ (C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

A. 489888

B. 49888.

C. 48988.

D. 4889888.

- Câu 40. (THI HK1 LỚP 11 THPT VIỆT TRÌ 2018 - 2019)** Cho khai triển $(1 + 3x)^n = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số thỏa mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} = 4096$. Tìm hệ số a_i lớn nhất.
- A. 1732104. B. 3897234. C. 4330260. D. 3247695.
- Câu 41. (Chuyên Nguyễn Huệ - Hà Nội - HK1 2018 - 2019)** Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^{3n+1}$ với $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2$.
- A. $210x^6$. B. 210. C. $120x^6$. D. 120.
- Câu 42. (TH&TT LẦN 1 - THÁNG 12)** Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^n$ ($x \neq 0$), biết rằng $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n}$ (C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).
- A. 326592. B. 3265922 C. 3265592 D. 32692.
- Câu 43. (HK1_L11-NGUYỄN GIA THIỀU - HÀ NỘI 1718)** Tìm số hạng chứa x^{26} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.
- A. 325. B. 210. C. 200. D. 152.
- Câu 44. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 2 - 2018)** Với n là số tự nhiên thỏa mãn $C_{n-4}^{n-6} + nA_n^2 = 454$, hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức Niu-ton của $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^n$ (với $x \neq 0$) bằng
- A. 1972. B. 786. C. 1692. D. -1792.
- Câu 45. (SGD&ĐT BẮC GIANG - LẦN 1 - 2018)** Với n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1 + C_n^3 = 13n$, hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$ bằng.
- A. 120. B. 252. C. 45. D. 210.
- Câu 46. (THPT CHUYÊN LAM SƠN - THANH HÓA - 2018)** Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2 = C_n^2 + C_n^1 + 4n + 6$. Hệ số của số hạng chứa x^9 của khai triển biểu thức $P(x) = \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^n$ bằng:
- A. 18564. B. 64152. C. 192456. D. 194265.
- Câu 47. (HỒNG LĨNH - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018)** Biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78$, số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^n$ là
- A. $-101376x^8$. B. -101376 . C. -112640 . D. $101376x^8$.
- Câu 48. (THPT TRẦN PHÚ - ĐÀ NẴNG - 2018)** Với n là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^3 - 3A_n^2 = 52(n-1)$. Trong khai triển biểu thức $(x^3 + 2y^2)^n$, gọi T_k là số hạng mà tổng số mũ của x và y của số hạng đó bằng 34. Hệ số của T_k là
- A. 54912. B. 1287. C. 2574. D. 41184.

- Câu 58. (CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 1 - 2018)** Trong khai triển $\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ biết hệ số của x^3 là $3^4 C_n^5$. Giá trị n có thể nhận là
A. 9. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 16.
- Câu 59. (THPT LÊ XOAY - LẦN 3 - 2018)** Hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n; (x > 0)$ biết $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$ là
A. 1303. **B.** 313. **C.** 495. **D.** 13129.
- Câu 60. (CTN - LẦN 1 - 2018)** Tìm hệ số của x^4 trong khai triển nhị thức Newton $\left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^n$ với $x > 0$, biết n là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn $A_n^5 \leq 18A_{n-2}^4$.
A. 8064. **B.** 3360. **C.** 13440. **D.** 15360.
- Câu 61. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN - HÀ NỘI - LẦN 1 - 2018)** Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ biết $A_n^2 - C_n^2 = 105$.
A. -3003. **B.** -5005. **C.** 5005. **D.** 3003.
- Câu 62. (THPT QUỲNH LƯU - NGHỆ AN - 2018)** Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \dots + C_{2n+1}^{2n} = 1024$.
A. 2099529. **B.** -2099520. **C.** -1959552. **D.** 1959552.
- Câu 63. [HỒNG LĨNH - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018]** Biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78$, số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^n$ là
A. $-101376x^8$. **B.** -101376 . **C.** -112640 . **D.** $101376x^8$.
- Câu 64. (ĐỀ THI GIỮA KỲ II YÊN PHONG 1 - 2018)** Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(x - \frac{2}{x}\right)^n$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^3 = \frac{4}{3}n + 2C_n^2$
A. 134 **B.** 144 **C.** 115 **D.** 141
- Câu 65. (THPT HOÀNG MAI - NGHỆ AN - 2018)** Tìm hệ số không chứa x trong khai triển $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^n$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78$.
A. 112640. **B.** 112643. **C.** -112640. **D.** -112643.
- Dạng 2.1.4 Số hạng không chứa x (số hạng độc lập)**
- Câu 66. (THI HK1 LỚP 11 THPT VIỆT TRÌ 2018 - 2019)** Trong khai triển $\left(x + \frac{8}{x^2}\right)^9$, số hạng không chứa x là
A. 40096. **B.** 43008. **C.** 512. **D.** 84.

- Câu 67.** (Lương Thế Vinh - Kiểm tra giữa HK1 lớp 11 năm 2018 - 2019) Số hạng độc lập với x trong khai triển $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^8$ là
- A. 1792. B. 792. C. 972. D. 1972.
- Câu 68.** (HỌC KÌ 1- LỚP 11- KIM LIÊN HÀ NỘI 18-19) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{12}$.
- A. -220 . B. 220. C. 924. D. -924 .
- Câu 69.** (KSCL LẦN 1 CHUYÊN LAM SƠN - THANH HÓA_2018-2019) Cho x là số thực dương, số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30}$ là
- A. 2^{20} . B. $2^{20} C_{30}^{10}$. C. $2^{10} C_{30}^{20}$. D. C_{30}^{20} .
- Câu 70.** (THPT NGUYỄN TRÃI-THANH HOÁ - Lần 1.Năm 2018&2019) Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{45}$ là
- A. C_{45}^5 . B. $-C_{45}^5$. C. C_{45}^{15} . D. $-C_{45}^{15}$.
- Câu 71.** (THUẬN THÀNH SỐ 2 LẦN 1_2018-2019) Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \frac{2}{x}\right)^{10}$ là
- A. C_{10}^5 . B. $-C_{10}^5 \cdot 2^5$. C. $-C_{10}^5$. D. $C_{10}^5 \cdot 2^5$.
- Câu 72.** (Kim Liên - Hà Nội - L1 - 2018-2019) Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là:
- A. 5. B. 35. C. 45. D. 7.
- Câu 73.** (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-HKI 18-19) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6, x \neq 0$.
- A. 240. B. 15. C. -240 . D. -15 .
- Câu 74.** (Chuyên Lào Cai Lần 3 2017-2018) Số hạng không chứa x trong khai triển biểu thức $A = \left(\frac{1}{x} - x^2\right)^{12}$ là
- A. -924 . B. 495. C. -495 . D. 924.
- Câu 75.** (Bình Minh - Ninh Bình - Lần 4 - 2018) Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{45}$ là
- A. C_{45}^{15} . B. C_{45}^{30} . C. $-C_{45}^5$. D. $-C_{45}^{15}$.
- Câu 76.** (DHSP HÀ NỘI HKI 2017-2018) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^5$.
- A. 10. B. 20. C. 5. D. 1.

Câu 86. (THPT PHAN CHU TRINH - ĐẮC LẮC - 2018) Số hạng không chứa x trong khai triển

$\left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$ với $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2$ là:

- A. $-C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$. B. $C_{16}^0 \cdot 2^{16}$. C. $C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$. D. $C_{16}^{16} \cdot 2^0$.

Câu 87. (SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH - 2018) Với số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^2 - n = 27$, trong khai triển

$\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^n$ số hạng không chứa x là

- A. 84. B. 672. C. 8. D. 5376.

Dạng 2.2 Khai triển của nhiều biểu thức

Dạng 2.2.1 Dạng $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$

Câu 88. (HKI - TRIỆU QUANG PHÚC 2018-2019) Cho khai triển

$(1 - 3x + 2x^2)^{2017} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{4034}x^{4034}$. Tìm a_2 .

- A. 9136578 B. 16269122. C. 8132544. D. 18302258.

Câu 89. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ SỐ 5) Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $f(x) = (1 - 3x + 2x^3)^{10}$ thành đa thức.

- A. 204120. B. -262440. C. -4320. D. -62640.

Câu 90. (CHUYÊN VINH - LẦN 1 - 2018) Cho khai triển $(3 - 2x + x^2)^9 = a_0x^{18} + a_1x^{17} + a_2x^{16} + \dots + a_{18}$.

Giá trị a_{15} bằng

- A. 218700. B. 489888. C. -804816. D. -174960.

Câu 91. (THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 3 - 2018) Tìm hệ số của x^3 sau khi khai triển và rút gọn các

đơn thức đồng dạng của $\left(\frac{1}{x} - x + 2x^2\right)^9$, $x \neq 0$.

- A. -2940. B. 3210. C. 2940. D. -3210.

Câu 92. (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 4 - 2018) Hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $(x^2 - 3x + 2)^6$ bằng

- A. -6432. B. -4032. C. -1632. D. -5418.

Câu 93. (SGD&ĐT HÀ NỘI - 2018) Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(1 + x + x^2 + x^3)^{10}$.

- A. 582. B. 1902. C. 7752. D. 252.

Câu 94. (THPT PHAN ĐÌNH PHÙNG - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (n+3)C_n^n = 3840$. Tổng tất cả các hệ số của các số hạng trong khai triển $(1 + x - x^2 + x^3)^n$ là

- A. 4^{10} . B. 4^9 . C. 2^{10} . D. 2^9 .

Câu 95. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC - LẦN 4 - 2018) Giả sử

$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{110}x^{110}$ với $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{110}$ là các hệ số.

Giá trị của tổng $T = C_{11}^0a_{11} - C_{11}^1a_{10} + C_{11}^2a_9 - C_{11}^3a_8 + \dots + C_{11}^{10}a_1 - C_{11}^{11}a_0$ bằng

- A. $T = -11$. B. $T = 11$. C. $T = 0$. D. $T = 1$.

- Câu 117. (HKI-Chu Văn An-2017)** Tính tổng $S = C_{10}^0 + 2C_{10}^1 + 2^2 C_{10}^2 + \dots + 2^{10} C_{10}^{10}$.
- A. $S = 59050$. B. $S = 59049$. C. $S = 1025$. D. $S = 1024$.
- Câu 118. (THPT CHU VĂN AN - HKI - 2018)** Tính tổng $S = C_{10}^0 + 2C_{10}^1 + 2^2 C_{10}^2 + 2^3 C_{10}^3 + \dots + 2^{10} C_{10}^{10}$.
- A. $S = 59050$. B. $S = 1024$. C. $S = 59049$. D. $S = 1025$.
- Câu 119. (SGD&ĐT ĐỒNG THÁP - 2018)** Tổng $C_{2016}^1 + C_{2016}^2 + C_{2016}^3 + \dots + C_{2016}^{2016}$ bằng
- A. 2^{2016} . B. 4^{2016} . C. $2^{2016} + 1$. D. $2^{2016} - 1$.
- Câu 120. (Chuyên Nguyễn Huệ - Hà Nội -HK1 2018 - 2019)** Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^0 + 4C_n^1 + 4^2 C_n^2 + \dots + 4^n C_n^n = 15625$. Tìm n .
- A. $n = 3$. B. $n = 5$. C. $n = 6$. D. $n = 4$.
- Câu 121. (THPT THUẬN THÀNH 1)** Tổng $S = 2C_{2019}^1 + 3C_{2019}^2 + \dots + 2019C_{2019}^{2018} + 2020C_{2019}^{2019}$ tương ứng bằng:
- A. 2020.2^{2019} . B. 2019.2^{2018} . C. $2021.2^{2018} - 1$. D. $2020.2^{2019} - 1$.
- Câu 122. (HKI-Nguyễn Gia Thiều 2018-2019)** Tính tổng $S = C_{22}^{12} + C_{22}^{13} + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22}$.
- A. $S = 2^{21} + C_{22}^{11}$. B. $S = 2^{21} + \frac{C_{22}^{11}}{2}$. C. $S = 2^{21} - \frac{C_{22}^{11}}{2}$. D. $S = 2^{21} - C_{22}^{11}$.
- Câu 123. (THPT CHU VĂN AN - THÁI NGUYÊN - 2018)** Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử ($0 \leq k \leq n; k, n \in \mathbb{Z}$) tính tổng sau:
- $$S = C_{2018}^0 + 2C_{2018}^1 + 3C_{2018}^2 + \dots + 2018C_{2018}^{2017} + 2019C_{2018}^{2018}$$
- A. 1009.2^{2016} . B. 1006.2^{2018} . C. 1010.2^{2018} . D. $1007.2^{2018}\sqrt{14}$.
- Câu 124. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ - THÁNG 4 - 2018)** Biểu thức $\frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^9}{9!} \cdot \frac{(1-x)}{1!} + \frac{x^8}{8!} \cdot \frac{(1-x)^2}{2!} + \dots + \frac{(1-x)^{10}}{10!}$ bằng
- A. $10!$. B. $20!$. C. $\frac{1}{10!}$. D. $\frac{1}{100!}$.
- Câu 125. (CỤM 5 TRƯỜNG CHUYÊN - ĐBSH - LẦN 1 - 2018)** Có bao nhiêu số dương n sao cho $S = 2 + (C_1^0 + C_2^0 + \dots + C_n^0) + (C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1) + \dots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}) + C_n^n$ là một số có 1000 chữ số?
- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.
- Câu 126. (HỌC KÌ 1- LỚP 11- KIM LIÊN HÀ NỘI 18-19)** Gọi n là số nguyên dương thỏa mãn:
- $$\frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{3!(n-3)!} + \frac{1}{5!(n-5)!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!1!} = \frac{1024}{n!}$$
- Tìm mệnh đề đúng.
- A. n là số chia hết cho 10. B. n là số nguyên tố.
C. n là số chia hết cho 3. D. n là số chia hết cho 4.

Phần B. LỜI GIẢI THAM KHẢO

Dạng 1. Tiếp cận với khai triển nhị thức newton

Câu 1. Số số hạng trong khai triển là: $n+1 = 50+1 = 51$.

Câu 2. Trong khai triển nhị thức $(a+b)^n$ thì số các số hạng là $n+1$ nên trong khai triển $(2x-3)^{2018}$ có 2019 số hạng.

Câu 3. Ta có:
 $(x-y)^5 = [x+(-y)]^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 (-y)^1 + C_5^2 x^3 (-y)^2 + C_5^3 x^2 (-y)^3 + C_5^4 x^1 (-y)^4 + C_5^5 (-y)^5$
 Hay $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4 y + 10x^3 y^2 - 10x^2 y^3 + 5xy^4 - y^5$.

Câu 4. Chọn C

Ta có: Khai triển nhị thức Niu-ton $(a+b)^n$ có $n+1$ số hạng.

Vậy trong khai triển nhị thức Niu-ton của $(3-2x)^{2019}$ có 2020 số hạng.

Câu 5. Chọn C

Xét khai triển $f(x) = (x+1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^k$.

Gọi S là tổng các hệ số trong khai triển thì ta có $S = f(1) = (1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Câu 6. Chọn C

Xét khai triển $f(x) = (x+1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^k$.

Gọi S là tổng các hệ số trong khai triển thì ta có $S = f(1) = (1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Câu 7. Xét khai triển $(1-2x)^{2018} = C_{2018}^0 - 2x.C_{2018}^1 + (-2x)^2.C_{2018}^2 + (-2x)^3.C_{2018}^3 + \dots + (-2x)^{2018}.C_{2018}^{2018}$
 Tổng các hệ số trong khai triển là: $S = C_{2018}^0 - 2.C_{2018}^1 + (-2)^2.C_{2018}^2 + (-2)^3.C_{2018}^3 + \dots + (-2)^{2018}.C_{2018}^{2018}$
 Cho $x=1$ ta có: $(1-2.1)^{2018} = C_{2018}^0 - 2.1.C_{2018}^1 + (-2.1)^2.C_{2018}^2 + (-2.1)^3.C_{2018}^3 + \dots + (-2.1)^{2018}.C_{2018}^{2018}$
 $\Leftrightarrow (-1)^{2018} = S \Leftrightarrow S = 1$

Câu 8. Ta có $(\sqrt{5} - \sqrt[4]{7})^{124} = \sum_{k=0}^{124} C_{124}^k \cdot (-1)^k \cdot 5^{\frac{124-k}{2}} \cdot 7^{\frac{k}{4}}$

Số hạng hữu tỉ trong khai triển tương ứng với $\begin{cases} \frac{124-k}{2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{k}{4} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{0; 4; 8; 12; \dots; 124\}$.

Vậy số các giá trị k là: $\frac{124-0}{4} + 1 = 32$.

Câu 9. Chọn A

$P(x) = (\sqrt[3]{2x} + 3)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} (\sqrt[3]{2x})^{2018-k} \cdot 3^k = \sum_{k=0}^{2018} 2^{\frac{2018-k}{3}} \cdot 3^k \cdot x^{2018-k}$

Để hệ số nguyên dương thì $(2018-k):3 \Leftrightarrow 2018-k = 3t \Leftrightarrow k = 2018-3t$, do $0 \leq k \leq 2018$ nên ta có $0 \leq 2018-3t \leq 2018 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \frac{2018}{3} \approx 672,6$ vậy $t=0,1,2,\dots,672$ nên có 673 giá trị

Câu 10. Chọn A

Ta có $(1-2x)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (-2)^k x^k$, $(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a_0 = C_{20}^0, a_1 = -2.C_{20}^1, a_2 = (-2)^2 C_{20}^2 = 4C_{20}^2$.

Vậy $a_0 - a_1 + a_2 = C_{20}^0 + 2C_{20}^1 + 4C_{20}^2 = 801$.

Câu 11. Chọn C

$$\text{Ta có } \left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5}\right)^{2019} = \sum_{k=0}^{2019} C_{2019}^k \cdot \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2019-k} \cdot \left(\sqrt[5]{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{2019} C_{2019}^k \cdot 3^{\frac{2019-k}{3}} \cdot 5^{\frac{k}{5}}.$$

$$\text{Để trong khai triển có số hạng là số nguyên thì } \begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 2019 \\ \frac{2019-k}{3} \in \mathbb{N} \\ \frac{k}{5} \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 2019 \\ 673 - \frac{k}{3} \in \mathbb{N} \\ \frac{k}{5} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 2019 \\ k:15 \end{cases}$$

Ta có $k:15 \Rightarrow k=15m$ mà $0 \leq k \leq 2019 \Leftrightarrow 0 \leq 15m \leq 2019 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 134,6$. Suy ra có 135 số hạng là số nguyên trong khai triển của biểu thức.

Câu 12. Chọn D

$$\text{Ta có số hạng thứ } k+1 \text{ là: } C_{2019}^k \left(x^{\frac{1}{15}} y^{\frac{1}{3}}\right)^{2019-k} \left(x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{5}}\right)^k = C_{2019}^k x^{\frac{2019-k}{15} + \frac{4k}{15}} y^{\frac{2019-k}{3} - \frac{2k}{15}}$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } \frac{2019-k}{15} + \frac{4k}{15} = \frac{2019}{3} - \frac{2k}{15} \Leftrightarrow k = 1346$$

Vậy số hạng thỏa yêu cầu bài toán là số hạng thứ 1347.

Câu 15. (THPT Yên Dũng 3 - Bắc Giang lần 1- 18-19) Cho khai triển

$$(2x-1)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}. \text{ Tìm } a_1$$

A. 20. B. 40. C. -40. D. -760. Chọn C

Ta có: a_1 là hệ số của x

$$\text{Hạng tử chứa } x \text{ trong khai triển là: } -C_{20}^{19}2x \Rightarrow a_1 = -40$$

Câu 13. $(1-2x)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x_{20}$ (1).

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào (1) ta có: } a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = (-1)^{20} = 1.$$

Dạng 2. Tìm hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức newton

Dạng 2.1 Khai triển của 1 biểu thức

Dạng 2.1.1 Bài toán tìm hệ số của số hạng

Câu 14. Chọn C

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{12}$ (với $x > 0$) là

$$T_{k+1} = C_{12}^k \cdot x^{12-k} \cdot \left(-\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^k = (-2)^k \cdot C_{12}^k \cdot x^{12-k} \cdot x^{-\frac{3k}{2}} = (-2)^k \cdot C_{12}^k \cdot x^{12-\frac{5k}{2}}.$$

$$\text{Số hạng trên chứa } x^7 \text{ suy ra } 12 - \frac{5k}{2} = 7 \Leftrightarrow k = 2.$$

$$\text{Vậy hệ số của số hạng chứa } x^7 \text{ trong khai triển trên là } = (-2)^2 \cdot C_{12}^2 = 264.$$

Câu 15. Chọn D

Số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{13}$.

$$T_{k+1} = C_{13}^k x^{13-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{13}^k x^{13-2k}.$$

$$T_{k+1} \text{ chứa } x^7 \Leftrightarrow 13 - 2k = 7 \Leftrightarrow k = 3.$$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển nhị thức $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{13}$ bằng: $C_{13}^3 = 286$.

Câu 16. Chọn C

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-k} \cdot x^{-2k} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-3k}$$

Theo giả thiết: $40 - 3k = 31 \Rightarrow k = 3$.

Vậy hệ số của x^{31} là $C_{40}^3 = 9880$.

Câu 17. Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)^4 &= \sum_{k=0}^4 C_4^k \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{4-k} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= \frac{1}{256} + \frac{3}{64}x + \frac{27}{128}x^2 + \frac{27}{64}x^3 + \frac{81}{256}x^4 \end{aligned}$$

Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển là $\frac{27}{64}$.

Câu 18. Chọn D

Ta có: $T_{k+1} = C_n^k \cdot 2^k \cdot x^k$.

Hệ số của x^2 trong khai triển bằng 180

$$C_n^2 \cdot 2^2 = 180 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} \cdot 2^2 = 180 \Leftrightarrow n(n-1) = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 \\ n = -9 \end{cases}$$

Câu 19. Chọn D

Số hạng tổng quát là: $T_{k+1} = C_{10}^k \cdot x^k$.

Số hạng chứa x^7 trong khai triển $(1+x)^{10}$ là: $T_8 = C_{10}^7 \cdot x^7$ nên hệ số là 45.

Câu 20. Chọn D

$$\text{Ta có: } \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k (x^2)^k \left(\frac{2}{x}\right)^{7-k} = \sum_{k=0}^7 C_7^k \cdot 2^{7-k} \cdot x^{3k-7}.$$

Cần tìm k sao cho $3k - 7 = 5$, suy ra $k = 4$.

Vậy hệ số h của số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^7$ là $h = C_7^4 \cdot 2^3 = 280$.

Câu 21. Chọn A

$$\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{15-k} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{15-k} (-2)^k (x^{-2})^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (-2)^k x^{15-3k}$$

Số hạng tổng quát của khai triển $T_{k+1} = C_{15}^k (-2)^k x^{15-3k}$

Số của số hạng chứa x^6 : $15 - 3k = 6 \Leftrightarrow k = 3$. Hệ số của số hạng chứa x^6

$$C_{15}^3 (-2)^3 = C_{15}^3 (-2)^3 = -3640$$

Câu 22. Chọn C

Số hạng tổng quát của khai triển đã cho là $C_{15}^k \cdot (x^3)^{15-k} \cdot (xy)^k = C_{15}^k \cdot x^{45-2k} \cdot y^k$,
 với $0 \leq k \leq 15$, $k \in \mathbb{N}$. Số hạng này chứa $x^{25}y^{10}$ khi và chỉ khi $k = 10$ (thỏa mãn).
 Vậy hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$ là $C_{15}^{10} = 3003$.

Câu 23. Chọn D

Ta có:
$$\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k x^{6-k} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^6 2^k C_6^k x^{6-\frac{3k}{2}}.$$

Số hạng chứa x^3 ứng với $6 - \frac{3k}{2} = 3 \Rightarrow k = 2$. Vậy hệ số của số hạng chứa x^3 bằng $2^2 \cdot C_6^2 = 60$.

Câu 24. Chọn D

Ta có:
$$\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k x^{6-k} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^6 2^k C_6^k x^{6-\frac{3k}{2}}.$$

Số hạng chứa x^3 ứng với $6 - \frac{3k}{2} = 3 \Rightarrow k = 2$. Vậy hệ số của số hạng chứa x^3 bằng $2^2 \cdot C_6^2 = 60$.

Câu 25. Chọn D

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển của $(1-3x)^n$ là: $T_{k+1} = C_n^k (-3)^k x^k$.

Số hạng chứa x^2 ứng với $k = 2$.

Ta có: $C_n^2 (-3)^2 = 90 \Leftrightarrow C_n^2 = 10$ (với $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$)

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 10 \Leftrightarrow n(n-1) = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -4(L) \end{cases}. \text{ Vậy } n = 5.$$

Dạng 2.1.2 Bài toán tìm số hạng thứ k

Câu 26. Chọn B

Ta có
$$(2-x)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \cdot 2^{15-k} \cdot (-x)^k$$

Số hạng thứ 13 trong khai triển tương ứng với $k = 12 \Rightarrow C_{15}^{12} \cdot 2^{15-12} \cdot (-x)^{12} = 3640x^{12}$.

Câu 27. Chọn A

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là: $T_{k+1} = C_9^k x^{9-k} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^k = C_9^k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k x^{9-2k}$.

Số hạng chứa x^3 có giá trị k thỏa mãn: $9 - 2k = 3 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng chứa x^3 trong khai triển là: $-\frac{1}{8} C_9^3 x^3$.

Câu 28. Chọn B

Ta có công thức của số hạng tổng quát:

$$T_{k+1} = C_{13}^k x^{13-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = C_{13}^k x^{13-k} (-1)^k x^{-k} = C_{13}^k \cdot (-1)^k x^{13-2k}$$

Số hạng chứa x^7 khi và chỉ khi $13 - 2k = 7 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng chứa x^7 trong khai triển là $-C_{13}^3 x^7$.

Câu 29. Chọn D

Ta có khai triển:
$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-k} (x^{-2})^k = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-3k}$$

Số hạng tổng quát trong khai triển: $C_{40}^k x^{40-3k}$

Số hạng chứa x^{31} ứng với: $40-3k=31 \Leftrightarrow k=3$

Vậy số hạng chứa x^{31} là: $C_{40}^3 x^{31}$

Câu 30. Chọn B

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{40}$ là:

$$a_{k+1} = C_{40}^k x^{40-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{40}^k x^{40-k} x^{-k} = C_{40}^k x^{40-2k}.$$

Số hạng chứa x^{34} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{40}$ tương ứng với: $40-2k=34 \Leftrightarrow k=3$.

Vậy số hạng chứa x^{34} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{40}$ là: $C_{40}^3 x^{34}$.

Câu 31. Chọn D

$$\text{Ta có: } (1+4x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (4x)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k 4^k x^k.$$

Hệ số của số hạng chứa x^2 là: $C_n^2 4^2$.

$$\text{Giả thiết suy ra } C_n^2 4^2 = 3040 \Leftrightarrow C_n^2 = 190 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 190 \Leftrightarrow n^2 - n - 380 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 20 \text{ (t/m)} \\ n = -19 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Câu 32. Số hạng tổng quát thứ $k+1$ là $T_{k+1} = C_n^k (-3x)^k = C_n^k (-3)^k x^k$.

Vì hệ số của x^2 nên cho $k=2$.

$$\text{Khi đó ta có } C_n^2 (-3)^2 = 90 \Leftrightarrow C_n^2 = 10 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \text{ (n)} \\ n = -4 \text{ (l)} \end{cases}$$

Vậy $n=5$.

Câu 33. Ta có $(1+2x)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot 2x + C_n^2 \cdot (2x)^2 + \dots + C_n^n (2x)^n$.

$$\text{Hệ số của } x^2 \text{ bằng } 180 \Leftrightarrow 4 \cdot C_n^2 = 180 \Leftrightarrow 4 \frac{n!}{2!(n-2)!} = 180 \Leftrightarrow n(n-1) = 90$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -9 \text{ (l)} \\ n = 10 \end{cases}$$

Vậy $n=10$.

Câu 34. Ta có $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 (-1)^k \cdot C_5^k \cdot (3x^3)^{5-k} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^5 (-1)^k \cdot C_5^k \cdot 3^{5-k} \cdot 2^k x^{15-5k}$.

Số hạng chứa x^{10} ứng với $15-5k=10 \Leftrightarrow k=1$.

Hệ số của số hạng chứa x^{10} là $(-1)^1 C_5^1 \cdot 3^4 \cdot 2^1 = -810$.

Câu 35. Ta có: $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-3k}$.

Số hạng tổng quát của khai triển là: $T_{k+1} = C_{40}^k x^{40-3k}$.

Số hạng chứa x^{31} trong khai triển tương ứng với $40-3k=31 \Leftrightarrow k=3$.

Vậy hệ số cần tìm là: $C_{40}^3 = C_{40}^{37}$ (theo tính chất của tổ hợp: $C_n^k = C_n^{n-k}$).

Câu 36. Ta có:
$$\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6 = \left(x + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k (x)^{6-k} \left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot 2^k (x)^{6-k} \left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot 2^k x^{6-\frac{3}{2}k}$$

Theo đề bài, $x^{6-\frac{3}{2}k} = x^3 \Leftrightarrow 6 - \frac{3}{2}k = 3 \Leftrightarrow k = 2$

Hệ số của $x^3 (x > 0)$ là: $C_6^2 \cdot 2^2 = 60$.

Dạng 2.1.3 Bài toán tìm hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức có thêm điều kiện n

Câu 37. Chọn C

Ta có: $C_n^0 + 2.C_n^1 + 2^2.C_n^2 + \dots + 2^n.C_n^n = 59049 \Rightarrow (2+1)^n = 59049 \Leftrightarrow 3^n = 3^{10} \Leftrightarrow n = 10$.

Ta được nhị thức $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^{10}$.

Số hạng thứ ba của khai triển là $T_3 = C_{10}^2 \cdot (x^2)^8 \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^2 = 405x^{14}$.

Theo giả thiết ta có: $405x^{14} = \frac{81}{2}n \Leftrightarrow 405x^{14} = 405 \Leftrightarrow x^{14} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Câu 38. Chọn C

Ta có: $A_n^3 = 72n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 72n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 72n \Leftrightarrow n = 10$.

Xét khai triển:

$$\left(2x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x^2)^{10-k} \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} x^{20-2k} \cdot x^{-3k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} x^{20-5k}$$

Số hạng chứa x^5 trong khai triển tương đương với: $20 - 5k = 5 \Leftrightarrow k = 3$.

Suy ra số hạng chứa x^5 trong khai triển là: $2^7 C_{10}^3 x^5$.

Câu 39. Chọn A

Tìm n.

Trước hết ta chứng minh công thức $\frac{k}{n} C_n^k = C_{n-1}^{k-1}$ với $1 \leq k \leq n$ và $n \geq 2$.

Thật vậy, $\frac{k}{n} C_n^k = \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = C_{n-1}^{k-1}$. (đpcm)

Áp dụng công thức trên ta có

$$1.C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + \dots + n.C_n^n = n \left(\frac{1}{n}.C_n^1 + \frac{2}{n}.C_n^2 + \frac{3}{n}.C_n^3 + \dots + \frac{n}{n}.C_n^n \right)$$

$$= n \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1} \right) = n2^{n-1}$$

Theo đề $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + \dots + n.C_n^n = 256n \Leftrightarrow n2^{n-1} = 256n \Leftrightarrow 2^{n-1} = 256 \Leftrightarrow n = 9$.

Chọn A.

Câu 40. Chọn C

Xét khai triển $(1+3x)^n = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$.

Cho $x = \frac{1}{3}$ ta được $\left(1 + 3 \cdot \frac{1}{3}\right)^n = a_0 + \frac{a_1}{3^1} + \dots + \frac{a_n}{3^n} \Rightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$.

Khi đó $(1 + 3x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot 3^k \cdot x^k$.

Ta có hệ số $a_k = 3^k C_{12}^k = 3^k \cdot \frac{12!}{k!(12-k)!}$

Hệ số a_k lớn nhất nên $\begin{cases} a_k \geq a_{k-1} \\ a_k \geq a_{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^k \cdot \frac{12!}{k!(12-k)!} \geq 3^{k-1} \cdot \frac{12!}{(k-1)!(12-k+1)!} \\ 3^k \cdot \frac{12!}{k!(12-k)!} \geq 3^{k+1} \cdot \frac{12!}{(k+1)!(12-k-1)!} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{k} \geq \frac{1}{12-k} \\ \frac{1}{12-k} \geq \frac{3}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 39-3k \geq k \\ k+1 \geq 36-3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq \frac{39}{4} \\ k \geq \frac{35}{4} \end{cases}$

Vì $k \in \mathbb{N}$ nên nhận $k = 9$.

Vậy hệ số lớn nhất $a_9 = 3^9 \cdot C_{12}^9 = 4330260$.

Câu 41. Chọn B

Đk: $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 3C_{n+1}^2 + nP_2 &= 4A_n^2 \\ \Leftrightarrow 3 \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} + 2!n &= 4 \frac{n!}{(n-2)!} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}n(n+1) + 2n &= 4n(n-1) \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2}n^2 - \frac{15}{2}n &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ (L)} \\ n = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $n = 3$, nhị thức trở thành $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^{10}$.

Số hạng tổng quát là $C_{10}^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{10-k} \cdot (x^3)^k = C_{10}^k \cdot x^{4k-10}$

Từ yêu cầu bài toán ta cần có: $4k - 10 = 6 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^6 là $C_{10}^4 = 210$.

Câu 42. Chọn A

Xét phương trình $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n}$ (1)

Điều kiện: $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (n-2)! \cdot 2!}{n!} + \frac{14(n-3)! \cdot 3!}{3 \cdot n!} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{4}{n(n-1)} + \frac{28}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{n-1} + \frac{28}{(n-1)(n-2)} = 1 \Leftrightarrow 4(n-2) + 28 = (n-1)(n-2) \Leftrightarrow n^2 - 7n - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 9 \\ n = -2 \text{ (l)} \end{cases}$$

Với $n = 9$ ta có: $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot (2x^2)^{9-k} \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot 2^{9-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{18-3k}$

Số hạng tổng quát của khai triển là $C_9^k \cdot 2^{9-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{18-3k}$

Cho $18 - 3k = 6 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow$ hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển là $C_9^4 \cdot 2^5 \cdot (-3)^4 = 326592$.

Câu 43. Chọn B

Từ giả thiết ta suy ra $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n} = 2^{2n}$.

Mặt khác: $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}, \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2n+1$ nên ta có:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n} = \frac{1}{2} (C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}) = \frac{1}{2} (1+1)^{2n+1} = 2^{2n}.$$

Suy ra: $2^{2n} = 2^{20} \Leftrightarrow n = 10$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10}$ là: $T_{k+1} = C_{10}^k \left(\frac{1}{x^4}\right)^{10-k} (x^7)^k = C_{10}^k x^{11k-40}$.

Hệ số của x^{26} là C_{10}^k với k thỏa mãn: $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy hệ số của x^{26} là $C_{10}^6 = 210$.

Câu 44. Điều kiện $n \geq 6$ và $n \in \mathbb{N}$.

$$C_{n-4}^{n-6} + nA_n^2 = 454 \Leftrightarrow \frac{(n-4)!}{(n-6)!2!} + n \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = 454 \Leftrightarrow \frac{(n-5)(n-4)}{2} + n^2(n-1) = 454$$

$$\Leftrightarrow 2n^3 - n^2 - 9n - 888 = 0 \Leftrightarrow n = 8 \text{ (Vì } n \in \mathbb{N}\text{)}.$$

Khi đó ta có khai triển: $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^8$.

Số hạng tổng quát của khai triển là $C_8^k \left(\frac{2}{x}\right)^{8-k} (-x^3)^k = C_8^k (-1)^k 2^{8-k} x^{4k-8}$.

Hệ số của số hạng chứa x^4 ứng với k thỏa mãn: $4k - 8 = 4 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 là: $C_8^3 (-1)^3 2^5 = -1792$.

Câu 45. $C_n^1 + C_n^3 = 13n \Leftrightarrow n + \frac{n!}{3!(n-3)!} = 13n \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 13n \Leftrightarrow 6 + n^2 - 3n + 2 = 78.$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -7 \\ n = 10 \end{cases}. \text{ Vì } n \text{ là số nguyên dương nên } n = 10.$$

Ta có khai triển: $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$.

Số hạng tổng quát của khai triển: $T_{k+1} = C_{10}^k x^{2(10-k)} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = C_{10}^k x^{20-5k}$.

Số hạng chứa x^5 ứng với $20 - 5k = 5 \Leftrightarrow k = 3$. Vậy hệ số của số hạng chứa $C_{10}^3 = 120$.

Câu 46. $A_n^2 = C_n^2 + C_n^1 + 4n + 6 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!2!} + \frac{n!}{(n-1)!1!} + 4n + 6$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + n + 4n + 6 \Leftrightarrow n^2 - 11n - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \text{ (l)} \\ n = 12 \text{ (n)} \end{cases}.$$

Khi đó $P(x) = \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{12}$.

Công thức số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_{12}^k \cdot (x^2)^{12-k} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^k = C_{12}^k \cdot 3^k \cdot x^{24-3k}$.

Số hạng chứa $x^9 \Rightarrow 24 - 3k = 9 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển là $C_{12}^5 \cdot 3^5 = 192456$.

Câu 47. Ta có: $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} + \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 78 \Leftrightarrow n + \frac{(n-1)n}{2} = 78$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ n = -13 \end{cases} \Leftrightarrow n = 12$ (vì n là số nguyên dương).

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{12}$ là: $(-1)^k C_{12}^k (x^3)^{12-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k = (-1)^k C_{12}^k \cdot 2^k \cdot x^{36-4k}$.

Cho $36 - 4k = 8 \Leftrightarrow k = 7$.

Vậy số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{12}$ là $-C_{12}^7 \cdot 2^7 \cdot x^8 = -101376x^8$.

Câu 48. Điều kiện: $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $3C_{n+1}^3 - 3A_n^2 = 52(n-1) \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} - 3 \frac{n!}{(n-2)!} = 52(n-1)$

$\Leftrightarrow \frac{(n-1)n(n+1)}{2} - 3n(n-1) = 52(n-1) \Leftrightarrow n^2 + n - 6n = 104$

$\Leftrightarrow n^2 - 5n - 104 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 13 \\ n = -8 \end{cases} \Leftrightarrow n = 13$.

$(x^3 + 2y^2)^{13} = \sum_0^{13} C_{13}^k (x^3)^{13-k} (2y^2)^k = \sum_0^{13} C_{13}^k 2^k x^{39-3k} y^{2k}$.

Ta có: $39 - 3k + 2k = 34 \Leftrightarrow k = 5$. Vậy hệ số $C_{13}^5 2^5 = 41184$.

Câu 49. Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Có $5C_n^1 - C_n^2 = 5 \Rightarrow 5n - \frac{n(n-1)}{2} = 5 \Leftrightarrow n^2 - 11n + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = 10 \end{cases}$

Do $n \geq 2 \Rightarrow n = 10$.

Xét khai triển: $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x)^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 2^{10-k} x^{10-3k}$

Hệ số a của x^4 trong khai triển tương ứng với $10 - 3k = 4 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy hệ số cần tìm là $a = C_{10}^2 \cdot 2^8 = 11520$.

Câu 50. Điều kiện $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

Ta có $3A_n^{n-2} + C_n^3 = 40 \Leftrightarrow 3 \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} = 40 \Leftrightarrow n! \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6(n-3)!} \right) = 40$.

Vì $\frac{3}{2} + \frac{1}{6(n-3)!} > 1$ nên $n! < 40$. Lần lượt thử các giá trị $n = 3, 4$ ta có $n = 4$ thỏa mãn.

Với $n = 4$, số hạng tổng quát trong khai triển $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^8$ là $C_8^k (2x)^{8-k} \left(-\frac{1}{x}\right)^k = C_8^k 2^{8-k} (-1)^k x^{8-2k}$.

Số hạng chứa x^6 tương ứng với $8 - 2k = 6 \Leftrightarrow k = 1$. Do đó hệ số cần tìm là $C_8^1 2^{8-1} (-1)^1 = -1024$.

Câu 51. Giải phương trình: $A_n^2 + 3C_n^1 = 120$, Đk: $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

$$A_n^2 + 3C_n^1 = 120 \Leftrightarrow n(n-1) + 3n = 120 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 \\ n = -12(l) \end{cases}$$

$$\text{Có } \left(x^4 - \frac{3}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-3)^k x^{4n-5k}.$$

Số hạng không chứa x khi $4n - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_n^8 \cdot (-3)^8 = 295245$.

Câu 52. điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

$$C_n^3 + A_n^2 = 50 \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 50$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) - 300 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^3 + 3n^2 - 4n - 300 = 0 \Leftrightarrow n = 6.$$

Ta có nhị thức $\left(\frac{3}{x} + \frac{x}{2}\right)^{12}$.

$$\text{Số hạng tổng quát } C_{12}^k \left(\frac{3}{x}\right)^{12-k} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{C_{12}^k \cdot 3^{12-k}}{2^k} \cdot x^{2k-12}$$

Cho $2k - 12 = 8 \Rightarrow k = 10$.

$$\text{Hệ số cần tìm là } \frac{C_{12}^{10} \cdot 3^2}{2^{10}} = \frac{297}{512}.$$

Câu 53. Xét khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$ (1)

$$\text{Đạo hàm hai vế của (1) ta được: } n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + nC_n^n x^{n-1}$$
 (2)

Trong công thức (2) ta cho $x=1$ ta được:

$$n2^{n-1} = C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 + \dots + nC_n^n \Leftrightarrow n \cdot 2^{n-1} = 256n \Leftrightarrow 2^{n-1} = 256 \Leftrightarrow n = 9.$$

$$\text{Khi đó, } \left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^n = \left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k (-3)^k 2^{9-k} x^{18-3k}.$$

Do đó số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^9$ nếu $18 - 3k = 0$ hay $k = 6$.

Suy ra số hạng cần tìm là $C_9^6 (-3)^6 2^3 = 489888$.

Câu 54. Ta có $(1-2x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-2x)^k$. Vậy $a_0 = 1$; $a_1 = -2C_n^1$; $a_2 = 4C_n^2$.

Theo bài ra $a_0 + a_1 + a_2 = 71$ nên ta có:

$$1 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 71 \Leftrightarrow 1 - 2 \frac{n!}{1!(n-1)!} + 4 \frac{n!}{2!(n-2)!} = 71 \Leftrightarrow 1 - 2n + 2n(n-1) = 71$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 4n - 70 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 35 = 0 \Leftrightarrow n = 7 \text{ (thỏa mãn) hoặc } n = -5 \text{ (loại)}.$$

Từ đó ta có $a_5 = C_7^5 (-2)^5 = -672$.

Câu 55. Ta có

$$A_n^2 - C_n^3 = 10 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{3!(n-3)!} = 10, (n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) - \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) = 10 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{4}{3}n - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ n = 6 \\ n = 5 \end{cases}.$$

So điều kiện nhận $n = 6$ hay $n = 5$.

$$\text{Khi } n = 6, \text{ ta có } \left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k x^{2(6-k)} \left(\frac{-2}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k (-2)^k x^{12-5k}.$$

$$\text{Để có } x^5 \text{ thì } 12 - 5k = 5 \Leftrightarrow k = \frac{7}{5} \text{ (loại).}$$

$$\text{Khi } n = 5, \text{ ta có } \left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k x^{2(5-k)} \left(\frac{-2}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k (-2)^k x^{10-5k}.$$

$$\text{Để có } x^5 \text{ thì } 10 - 5k = 5 \Leftrightarrow k = 1.$$

$$\text{Vậy } a_5 = C_5^1 (-2) = -10.$$

Câu 56. Ta có: $A_n^3 + 2A_n^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 2\frac{n!}{(n-2)!} = 100 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 2n(n-1) = 100$

$$\Leftrightarrow n^3 - n^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow n = 5.$$

$$\text{Ta có: } (1+3x)^{2n} = (1+3x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (3x)^k.$$

$$\text{Hệ số } x^5 \text{ sẽ là } C_{10}^5 3^5 = 61236.$$

Câu 57. Ta có $(3-1)^n = 3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$

$$\Leftrightarrow 2^n = 2048 \Leftrightarrow 2^n = 2^{11} \Leftrightarrow n = 11.$$

$$\text{Xét khai triển } (x+2)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{11-k} \cdot 2^k$$

$$\text{Tìm hệ số của } x^{10} \Leftrightarrow \text{ tìm } k \in \mathbb{N} (k \leq 11) \text{ thỏa mãn } 11 - k = 10 \Leftrightarrow k = 1.$$

$$\text{Vậy hệ số của } x^{10} \text{ trong khai triển } (x+2)^{11} \text{ là } C_{11}^1 \cdot 2 = 22.$$

Câu 58. Ta có $\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (3x^2)^{n-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k 3^{n-k} x^{2n-3k}.$

$$\text{Biết hệ số của } x^3 \text{ là } 3^4 C_n^5 \text{ nên } \begin{cases} 2n - 3k = 3 \\ n - k = 4 \\ k = 5 \\ 0 \leq k \leq n, (k, n \in \mathbb{N}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ n = 9 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } n = 9.$$

Câu 59. Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Ta có

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{(n+1)!3!} - \frac{(n+3)!}{n!3!} = 7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6} - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = 7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow 3n = 36 \Leftrightarrow n = 12.$$

Xét khai triển

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^{12} &= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(\frac{1}{x^3}\right)^k (\sqrt{x^5})^{12-k} \quad (0 \leq k \leq 12, k \in \mathbb{N}) \\ &= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{\frac{60-11k}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Để số hạng chứa } x^8 \text{ thì } \frac{60-11k}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 4.$$

Vậy hệ số chứa x^8 trong khai triển trên là $C_{12}^4 = 495$.

Câu 60. Điều kiện: $\begin{cases} n \geq 6 \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\text{Khi đó } A_n^5 \leq 18A_{n-2}^4 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-5)!} \leq 18 \cdot \frac{(n-2)!}{(n-6)!}$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \leq 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) \leq 18(n-5) \Leftrightarrow n^2 - 19n + 90 \leq 0 \Leftrightarrow 9 \leq n \leq 10 \xrightarrow{n \rightarrow \max} n = 10.$$

$$\begin{aligned} \text{Số hạng tổng quát trong khai triển } \left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{10} \text{ là } T_{k+1} &= C_{10}^k \cdot (2x)^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^k \\ &= C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^{10-k} \cdot x^{-\frac{k}{5}} = C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^{\frac{50-6k}{5}}. \end{aligned}$$

$$\text{Tìm } k \text{ sao cho } \frac{50-6k}{5} = 4 \Leftrightarrow k = 5.$$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 là $C_{10}^5 \cdot 2^{10-5} = 8064$.

Câu 61. Ta có: $A_n^2 - C_n^2 = 105 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} = 105 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n(n-1) = 105 \Leftrightarrow n^2 - n - 210 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 15 \\ n = -14 \quad (L) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra số hạng tổng quát trong khai triển: } T_{k+1} = C_{15}^k \cdot (x^2)^{15-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = C_{15}^k \cdot (-1)^k \cdot x^{30-3k}.$$

$$\text{Tìm } 30 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 10.$$

Vậy hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển là: $C_{15}^{10} \cdot (-1)^{10} = 3003$.

Câu 62. Ta có $(x+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 \cdot x^{2n+1} + C_{2n+1}^1 \cdot x^{2n} + \dots + C_{2n+1}^{2n} \cdot x + C_{2n+1}^{2n+1} \quad (1)$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào (1): } 2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1} \quad (2)$$

$$\text{Thay } x=-1 \text{ vào (1): } 0 = -C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 - \dots - C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1} \quad (3)$$

$$\text{Phương trình (2) trừ (3) theo vế: } 2^{2n+1} = 2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n})$$

Theo đề ta có $2^{2n+1} = 2.1024 \Leftrightarrow n = 5$

Số hạng tổng quát của khai triển $(2-3x)^{10}$:

$$T_{k+1} = C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot (-3x)^k = C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot (-3)^k \cdot x^k$$

Theo giả thiết ta có $k = 5$.

Vậy hệ số cần tìm $C_{10}^5 \cdot 2^5 \cdot (-3)^5 = -1959552$.

Câu 63. Ta có: $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!1!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 78 \Leftrightarrow n + \frac{(n-1)n}{2} = 78$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ n = -13 \end{cases} \Leftrightarrow n = 12 \text{ (vì } n \text{ là số nguyên dương).}$$

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{12}$ là: $(-1)^k C_{12}^k (x^3)^{12-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k = (-1)^k C_{12}^k \cdot 2^k \cdot x^{36-4k}$.

Cho $36 - 4k = 8 \Leftrightarrow k = 7$.

Vậy số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{12}$ là $-C_{12}^7 \cdot 2^7 \cdot x^8 = -101376x^8$.

Câu 64. Điều kiện: $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ta có } C_n^3 = \frac{4}{3}n + 2C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{4}{3}n + \frac{n!}{(n-2)!} \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 8n + 6n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 = 8 + 6n - 6 \Leftrightarrow n^2 - 9n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 9 \end{cases}. \text{Đổi chiều điều kiện ta được } n = 9.$$

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x - \frac{2}{x}\right)^9$, là: $C_9^k x^{9-k} \cdot \frac{(-2)^k}{x^k} = (-2)^k C_9^k x^{9-2k}$

Số hạng này chứa x^5 ứng với $9 - 2k = 5 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy hệ số của số hạng đó là $4 \cdot C_9^2 = 144$.

Câu 65. $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 78 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ n = -13(l) \end{cases}$

$$\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^n = \left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (x^3)^{12-k} (-2)^k \left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (-2)^k x^{36-4k}$$

Số hạng không chứa x ứng với $36 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 9$ là $C_{12}^9 (-2)^9 = -112640$.

Dạng 2.1.4 Số hạng không chứa x (số hạng độc lập)

Câu 66. Chọn B

Số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_9^k \cdot 8^k \cdot x^{9-3k}, 0 \leq k \leq 9$.

Số hạng không chứa x ứng với $9 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $T_4 = C_9^3 \cdot 8^3 = 43008$.

Câu 67. Chọn A

Ta có số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = C_8^k (x^3)^{8-k} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^k = C_8^k x^{24-4k} \cdot (-2)^k$.

Do tìm số hạng độc lập với x suy ra $24 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 6 \Rightarrow T_7 = C_8^6 \cdot (-2)^6 = 1792$.

Câu 68. Chọn A

Công thức số hạng thứ $(k+1)$ của khai triển $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ là:

$$T_k = C_{12}^k (-1)^k (x^3)^{12-k} \cdot \frac{1}{x^k} = C_{12}^k (-1)^k x^{36-4k}, 0 \leq k \leq 12, k \in \mathbb{N}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $36 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 9$ (thỏa mãn).

$$\text{Suy ra } T_7 = C_{12}^9 (-1)^9 = -220.$$

Câu 69. Chọn B

$$\text{Ta có } \left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30} = \left(x + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)^{30} = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k x^{30-k} \left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k 2^k x^{30-\frac{3}{2}k}$$

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = C_{30}^k 2^k x^{30-\frac{3}{2}k}$.

Số hạng này không chứa x tương ứng với trường hợp $30 - \frac{3k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 20$.

$$\text{Vậy số hạng không chứa } x \text{ trong khai triển là } T_{21} = C_{30}^{20} 2^{20} = 2^{20} C_{30}^{10}.$$

Câu 70. Chọn D

$$\text{Số hạng tổng quát trong khai triển là } T_{k+1} = C_{45}^k x^{45-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = C_{45}^k (-1)^k x^{45-3k}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $45 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 15$.

$$\text{Vậy số hạng cần tìm là } C_{45}^{15} (-1)^{15} = -C_{45}^{15}.$$

Câu 71. Chọn D

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x + \frac{2}{x}\right)^{10}$ là:

$$T_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = C_{10}^k \cdot 2^k x^{10-2k} \text{ (với } k \in \mathbb{N}; k \leq 10)$$

Số hạng không chứa x trong khai triển tương ứng với $10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$ (thỏa mãn).

$$\text{Vậy số hạng không chứa } x \text{ trong khai triển là: } C_{10}^5 \cdot 2^5.$$

Câu 72. Chọn B

$$\text{Ta có: } \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k (\sqrt[3]{x})^{7-k} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}.$$

$$\text{Số hạng không chứa } x \text{ trong khai triển ứng với } \begin{cases} \frac{7}{3} - \frac{7}{12}k = 0 \\ 0 \leq k \leq 7, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow k = 4.$$

Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là: $C_7^4 = 35$.

Câu 73. Chọn A

$$\text{Ta có: } \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k (2x)^{6-k} \cdot (-1)^k \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot 2^{6-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{6-3k}$$

Số hạng không chứa x xảy ra khi: $6 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 2$

$$\text{Số hạng đó là } C_6^2 \cdot 2^4 \cdot (-1)^2 = 240$$

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển trên là 240

Câu 74. Chọn B

Số hạng tổng quát trong khai triển là $T_{k+1} = C_{12}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{12-k} (-x^2)^k = C_{12}^k (-1)^k x^{3k-12}$.

Theo đề bài ta có $3k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{12}^4 (-1)^4 = 495$.

Câu 75. Chọn D

Có $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{45} = \sum_{k=0}^{45} C_{45}^k \cdot x^{45-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = (-1)^k \sum_{k=0}^{45} C_{45}^k \cdot x^{45-3k}$.

Tìm số hạng không chứa x thì $45 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 15$.

Vậy số hạng không chứa x là $-C_{45}^{15}$.

Câu 76.

Chọn A Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^5$ là: $T_k = C_5^k (x^2)^{5-k} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = C_5^k x^{10-5k}$.

Số hạng cần tìm không chứa x nên ta có: $10 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $T_2 = C_5^2 = 10$.

Câu 77. Chọn B

Ta có: $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k (\sqrt[3]{x})^{7-k} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k x^{\frac{7-k}{3} - \frac{k}{4}}$.

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $\begin{cases} \frac{7}{3} - \frac{7}{12}k = 0 \\ 0 \leq k \leq 7, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow k = 4$.

Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là: $C_7^4 = 35$.

Câu 78. Chọn B

Ta có $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30} = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k (x)^{30-k} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k (2)^k (x)^{\frac{60-3k}{2}}$.

Số hạng không chứa x tương ứng $\frac{60-3k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 20$.

Vậy số hạng không chứa x là: $2^{20} \cdot C_{30}^{20} = 2^{20} \cdot C_{30}^{10}$.

Câu 79. Ta có $\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} - \frac{x-1}{x - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{x} + 1 - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Nên $P = \left(\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} - \frac{x-1}{x - \sqrt{x}}\right)^{10} = \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

Số hạng tổng quát của khai triển là: $C_{10}^k x^{\frac{10-k}{3}} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right)^k = (-1)^k C_{10}^k x^{\frac{20-5k}{6}}$.

Khi $k = 4$ thì số hạng không chứa x là $(-1)^4 C_{10}^4 = 210$.

Câu 80. Ta có $f(x) = (x - 2x^{-2})^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k (-2x^{-2})^k x^{9-k} = \sum_{k=0}^9 C_9^k (-2)^k x^{-2k} x^{9-k}$

$$= \sum_{k=0}^9 C_9^k (-2)^k x^{-2k+9-k} = \sum_{k=0}^9 C_9^k (-2)^k x^{9-3k}$$

Số hạng không chứa x của khai triển $f(x)$ ứng với $9-3k=0 \Leftrightarrow k=3$

Vậy hệ số không chứa x là $C_9^3 \cdot (-2)^3 = -672$.

Câu 81. Số hạng tổng quát trong khai triển là: $(-1)^k C_{14}^k (\sqrt[3]{x})^{14-k} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = (-1)^k C_{14}^k \cdot 2^k \cdot x^{\frac{56-7k}{12}}$

Cho $\frac{56-7k}{12} = 0 \Leftrightarrow k=8$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là: $2^8 C_{14}^8$.

Câu 82. Ta có $x^{11} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^5}\right)^{11} = x^{11} \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{\frac{11-k}{2}} \cdot x^{-5k} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{\frac{33-11k}{2}}$.

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $33-11k=0 \Leftrightarrow k=3$.

Số hạng cần tìm là $C_{11}^3 = 165$.

Câu 83. Chọn A

Ta có: $C_n^1 + C_n^2 = 55$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 55 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 55 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 \\ n = -11 \end{cases} \Rightarrow n = 10$$

Với $n=10$ thì ta có:

$$\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n = \left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{3k} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{3k} \cdot 2^{10-k} \cdot x^{2k-20} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^{5k-20}$$

Để có số hạng không chứa x thì $5k-20=0 \Leftrightarrow k=4$.

Do đó hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển là: $C_{10}^4 \cdot 2^6 = 13440$.

Câu 84. Chọn C

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$C_n^2 - C_n^1 = 44 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 44 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 \text{ (tm)} \\ n = -8 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (x\sqrt{x})^{11-k} \left(\frac{1}{x^4}\right)^k = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{\frac{33-11k}{2}}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $\frac{33-11k}{2} = 0 \Leftrightarrow k=3$

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{11}^3 = 165$.

Câu 85. ĐK: $\begin{cases} n \geq 2 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} (*)$.

Ta có $C_n^2 - C_n^1 = 44 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 44 \Leftrightarrow n=11$ hoặc $n=-8$ (loại).

Với $n=11$, số hạng thứ $k+1$ trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{11}$ là

$$C_{11}^k (x\sqrt{x})^{11-k} \left(\frac{1}{x^4}\right)^k = C_{11}^k x^{\frac{33-11k}{2}}$$

Theo giả thiết, ta có $\frac{33}{2} - \frac{11k}{2} = 0$ hay $k = 3$.

Vậy, số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $C_{11}^3 = 165$.

Câu 86. Với điều kiện $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$, ta có

$$C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + 2n = (n+1)n \Leftrightarrow (n-1)(n-2) + 12 = 6(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \text{ (loại)} \\ n = 8 \text{ (thoả)} \end{cases}$$

Với $n = 8$, ta có số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $\left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ là

$$C_{16}^k (2x)^{16-k} \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = C_{16}^k 2^{16-k} (-3)^k x^{16 - \frac{4k}{3}}$$

Theo đề bài ta cần tìm k sao cho $16 - \frac{4k}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 12$.

Do đó số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$.

Câu 87. $C_n^2 - n = 27 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = 27 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 27$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 9 \text{ (TM)} \\ n = -6 \text{ (L)} \end{cases}$$

Xét khai triển $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^9$ có số hạng tổng quát

$$T_{k+1} = C_9^k x^{9-k} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = C_9^k \cdot 2^k x^{9-3k}$$

Số hạng không chứa x nên $9 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng không chứa x là: $T_4 = C_9^3 \cdot 2^3 = 672$.

Dạng 2.2 Khai triển của nhiều biểu thức

Dạng 2.2.1 Dạng $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$

Câu 88. Chọn D

Ta có $A = (1 - 3x + 2x^2)^{2017} = [(1 - 3x) + 2x^2]^{2017}$

$$\Rightarrow A = C_{2017}^0 (1 - 3x)^{2017} + C_{2017}^1 (1 - 3x)^{2016} (2x^2) + C_{2017}^2 (1 - 3x)^{2015} (2x^2)^2 + \dots + C_{2017}^{2017} (2x^2)^{2017}$$

Trong khai triển trên chỉ có hai số hạng $C_{2017}^0 (1 - 3x)^{2017}$, $C_{2017}^1 (1 - 3x)^{2016} (2x^2)$ xuất hiện biểu thức chứa x^2

$$\bullet C_{2017}^0 (1 - 3x)^{2017} = C_{2017}^0 \left[C_{2017}^0 - C_{2017}^1 (3x) + C_{2017}^2 (3x)^2 - C_{2017}^3 (3x)^3 + \dots - C_{2017}^{2017} (3x)^{2017} \right]$$

\Rightarrow Hệ số chứa x^2 trong số hạng $C_{2017}^0 (1 - 3x)^{2017}$ là: $C_{2017}^0 C_{2017}^2 (3)^2$

$$\bullet C_{2017}^1 (1 - 3x)^{2016} (2x^2) = C_{2017}^1 (2x^2) \left[C_{2016}^0 - C_{2016}^1 (3x) + C_{2016}^2 (3x)^2 + \dots + C_{2016}^{2016} (3x)^{2016} \right]$$

\Rightarrow Hệ số chứa x^2 trong số hạng $C_{2017}^1 (1 - 3x)^{2016} (2x^2)$ là: $2C_{2017}^1 C_{2016}^0$.

Vậy hệ số $a_2 = C_{2017}^0 C_{2017}^2 (3)^2 + 2C_{2017}^1 C_{2016}^0 = 18302258$

Câu 89. $f(x) = (1 - 3x + 2x^3)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (1 - 3x)^{10-k} \cdot (2x^3)^k = \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^{10-k} C_{10}^k C_{10-k}^i (-3x)^i \cdot (2x^3)^k$
 $= \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^{10-k} C_{10}^k C_{10-k}^i (-3)^i \cdot 2^k \cdot x^{i+3k} \quad (i, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 10, 0 \leq i \leq 10 - k).$

Số hạng chứa x^7 ứng với $i + 3k = 7$.

i	1	2	3	4	5	6	7
k	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
	T/m	Không t/m	Không t/m	T/m	Không t/m	Không t/m	T/m

Vậy hệ số của x^7 là: $C_{10}^2 \cdot C_8^1 \cdot (-3) \cdot 2^2 + C_{10}^1 \cdot C_9^4 \cdot (-3)^4 \cdot 2 + C_{10}^0 \cdot C_{10}^7 \cdot (-3)^7 = -62640$.

Câu 90. Ta có: $(3 - 2x + x^2)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot x^{18-2k} \cdot (3 - 2x)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot x^{18-2k} \sum_{i=0}^k C_k^i \cdot 3^{k-i} (-2x)^i \quad (0 \leq i \leq k \leq 9)$

Giá trị a_{15} ứng với: $18 - 2k + i = 3 \Rightarrow \begin{cases} i = 1 \\ k = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} i = 3 \\ k = 9 \end{cases}$.

Vậy: $a_{15} = C_9^8 \cdot C_8^1 \cdot 3^7 \cdot (-2)^1 + C_9^9 \cdot C_9^3 \cdot 3^6 \cdot (-2)^3 = -804816$.

Câu 91. Ta có

$$\left(\frac{1}{x} - x + 2x^2\right)^9 = \left[\frac{1}{x} + x(2x - 1)\right]^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \left(\frac{1}{x}\right)^{9-k} \cdot x^k \cdot (2x - 1)^k = \sum_{k=0}^9 \sum_{i=0}^k C_k^i C_9^k (-1)^{k-i} 2^i \cdot x^{2k+i-9}$$

Theo yêu cầu bài toán ta có $2k + i - 9 = 3 \Leftrightarrow 2k + i = 12$; $0 \leq i \leq k \leq 9$; $i, k \in \mathbb{N}$

Ta có các cặp (i, k) thỏa mãn là: $(0, 6), (2, 5), (4, 4)$.

Từ đó hệ số của x^3 là: $C_9^0 C_9^6 (-1)^{6-0} \cdot 2^0 + C_9^2 C_9^5 (-1)^{5-2} \cdot 2^2 + C_9^4 C_9^4 (-1)^{4-4} \cdot 2^4 = -2940$.

Câu 92. $(x^2 - 3x + 2)^6 = (x - 1)^6 (x - 2)^6$

Số hạng tổng quát trong khai triển $(x - 1)^6$ là $C_6^k \cdot x^k (-1)^{6-k}$ với $k = 0; 1; 2; \dots; 6$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(x - 2)^6$ là $C_6^i \cdot x^i (-2)^{6-i}$ với $i = 0; 1; 2; \dots; 6$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(x^2 - 3x + 2)^6 = (x - 1)^6 (x - 2)^6$ là $C_6^k x^k (-1)^{6-k} \cdot C_6^i x^i (-2)^{6-i}$
 $= C_6^k C_6^i x^{i+k} (-1)^{12-i-k} \cdot (2)^{6-i}$

Số hạng chứa x^7 ứng với $i + k = 7$. Kết hợp với điều kiện ta được các nghiệm

$i = 1 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow$ hệ số là $= C_6^6 C_6^1 (-1)^5 \cdot (2)^5 = -192$

$i = 2 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow$ hệ số là $= C_6^5 C_6^2 (-1)^5 \cdot (2)^4 = -1440$

$i = 3 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow$ hệ số là $= C_6^4 C_6^3 (-1)^5 \cdot (2)^3 = -2400$

$i = 4 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow$ hệ số là $= C_6^3 C_6^4 (-1)^5 \cdot (2)^2 = -1200$

$i = 5 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow$ hệ số là $= C_6^2 C_6^5 (-1)^5 \cdot (2)^1 = -180$

$i = 6 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ hệ số là $= C_6^1 C_6^6 (-1)^5 \cdot (2)^0 = -6$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $(x^2 - 3x + 2)^6$ bằng -5418

Cách 2.

$$(x^2 - 3x + 2)^6 = (x^2 + (-3x + 2))^6$$

Số hạng tổng quát trong khai triển trên là $C_6^k \cdot (x^2)^{6-k} \cdot (-3x + 2)^k$ với $k = 0; 1; 2; \dots; 6$.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(-3x + 2)^k$ là $C_k^i \cdot 2^{k-i} \cdot (-3x)^i$ với $0 \leq i \leq k$.

$$\begin{aligned} \text{Số hạng tổng quát trong khai triển } (x^2 - 3x + 2)^6 &\text{ là } C_6^k \cdot (x^2)^{6-k} \cdot C_k^i \cdot 2^{k-i} \cdot (-3x)^i \\ &= C_6^k \cdot C_k^i \cdot 2^{k-i} \cdot (-3)^i \cdot (x^{12-2k+i}) \end{aligned}$$

Số hạng chứa x^7 ứng với $12 - 2k + i = 7 \Leftrightarrow 2k - i = 5$. Kết hợp với điều kiện ta được các nghiệm

$$k = 3 \Rightarrow i = 1 \Rightarrow \text{hệ số là } = C_6^3 C_3^1 2^2 (-3)^1 = -720$$

$$k = 4 \Rightarrow i = 3 \Rightarrow \text{hệ số là } = C_6^4 C_4^3 (-3)^3 \cdot (2)^1 = -3240$$

$$k = 5 \Rightarrow i = 5 \Rightarrow \text{hệ số là } = C_6^5 C_5^5 (2)^0 \cdot (-3)^5 = -1458$$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $(x^2 - 3x + 2)^6$ bằng -5418 .

Câu 93. Ta có: $(1 + x + x^2 + x^3)^{10} = (1 + x^2)^{10} (1 + x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^{2k} \cdot \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i \cdot x^i = \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^{10} C_{10}^k \cdot C_{10}^i \cdot x^{2k+i}$

Hệ số của số hạng chứa x^5 nên $2k + i = 5$.

Trường hợp 1: $k = 0, i = 5$ nên hệ số chứa x^5 là $C_{10}^0 \cdot C_{10}^5$.

Trường hợp 2: $k = 1, i = 3$ nên hệ số chứa x^5 là $C_{10}^1 \cdot C_{10}^3$.

Trường hợp 3: $k = 2, i = 1$ nên hệ số chứa x^5 là $C_{10}^2 \cdot C_{10}^1$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^5 là $C_{10}^0 \cdot C_{10}^5 + C_{10}^1 \cdot C_{10}^3 + C_{10}^2 \cdot C_{10}^1 = 1902$.

Câu 94. $3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (n+3)C_n^n = 3840$

$$\Leftrightarrow (0+3)C_n^0 + (1+3)C_n^1 + (2+3)C_n^2 + \dots + (n+3)C_n^n = 3840$$

$$\Leftrightarrow (C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n) + 3(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n) = 3840$$

$$\Leftrightarrow n \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^n = 3840 \Leftrightarrow n = 9$$

Cho $x = 1 \Rightarrow (1 + x - x^2 + x^3)^9 = (1 + 1 - 1^2 + 1^3)^9 = 2^9$.

Câu 95. Ta có: $A = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})^{11} \Leftrightarrow (1 - x)^{11} A = (1 - x^{11})^{11}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-x)^k}_P \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{110} a_i x^i}_Q = \sum_{m=0}^{11} C_{11}^m (-x^{11})^m$$

Hệ số của x^{11} trong P là: $C_{11}^0 a_{11} - C_{11}^1 a_{10} + C_{11}^2 a_9 - C_{11}^3 a_8 + \dots + C_{11}^{10} a_1 - C_{11}^{11} a_0 = T$

Hệ số của x^{11} trong Q là: $-C_{11}^1$

Vậy $T = -C_{11}^1 = -11$.

Dạng 2.2.2 Tổng $(a_1 + b_1)^n + (a_2 + b_2)^m + \dots + (a_k + b_k)^h$

Câu 96. Chọn A

Đặt $A = (1 + x)^{12}$; $B = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{18}$

Ta có khai triển $A = (1 + x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^k$ có 13 số hạng.

Và khai triển $B = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{18} = \sum_{l=0}^{18} C_{18}^l x^{36-3l}$ có 19 số hạng.

Ta đi tìm các số hạng có cùng lũy thừa, mà giản ước được trong khai triển $P(x)$, ta phải có :

$$36 - 3l = k \Leftrightarrow k + 3l = 36 \quad (1)$$

Phương trình (1) cho ta 5 cặp nghiệm thỏa mãn $(k; l) = \{(0; 12), (3; 11), (6; 10), (9; 9), (12; 8)\}$ tương ứng với 5 số hạng.

Vậy sau khi khai triển và rút gọn $P(x)$ ta có $13 + 19 - 5 = 27$ số hạng.

Câu 97. Ta có $P(x) = a_{2018}x^{2018} + a_{2017}x^{2017} + \dots + a_1x + a_0$

$$\text{Cho } x = 1 \Rightarrow P(1) = a_{2018} + a_{2017} + \dots + a_1 + a_0 = (1 - 2)^{2017} + (3 - 2.1)^{2018} = 0.$$

Câu 98.
$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (x^2)^{12-k} \left(\frac{3}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 3^k x^{24-3k}$$

$$\left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{21} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k (2x^3)^{21-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k 2^{21-k} x^{63-5k}$$

Ta cho k chạy từ 0 đến 12 thì các số mũ của x không bằng nhau.

Với khai triển $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{12}$ ta có 13 số hạng; Với khai triển $\left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{21}$ ta có 22 số hạng. Vậy tổng số hạng là: 35.

Câu 99. Xét nhị thức $(x+1)^n = (1+x)^n$ có số hạng tổng quát là $C_n^k x^k$. Ta có:

Hệ số của x^5 trong $(1+x)^6$ là C_6^5 .

Hệ số của x^5 trong $(1+x)^7$ là C_7^5

Hệ số của x^5 trong $(1+x)^{12}$ là C_{12}^5 .

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)$ là $C_6^5 + C_7^5 + \dots + C_{12}^5 = 1715$.

Câu 100. Ta có $(1+x)^8 = C_8^0 + C_8^1x + \dots + C_8^8x^8$ suy ra hệ số chứa x^8 là C_8^8 .

Lại có $(1+x)^9 = C_9^0 + C_9^1x + \dots + C_9^8x^8 + C_9^9x^9$ suy ra hệ số của x^8 là C_9^8 .

Tương tự trong khai triển $(1+x)^{10}$ có hệ số của x^8 là C_{10}^8 .

$(1+x)^{11}$ có hệ số của x^8 là C_{11}^8 .

$(1+x)^{12}$ có hệ số của x^8 là C_{12}^8 .

Suy ra hệ số của x^8 trong $P(x)$ là $a_8 = C_8^8 + C_9^8 + C_{10}^8 + C_{11}^8 + C_{12}^8 = 715$.

Câu 101. Ta có

$$P(x) = (1+x)^8 + (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12}.$$

Áp dụng khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^n x^n.$$

Cho $x = 1$, ta có $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Do đó ta có tổng hệ số của $P(x)$ là:

$$S = 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12} = 2^8 (1 + 2 + 4 + 8 + 16) = 31 \cdot 2^8 = 7936.$$

Dạng 2.2.3 Tích $(a_1 + \dots + a_n)^m \cdot (b_1 + \dots + b_n)^l$

Câu 102. $(1+2x)(3+x)^{11} = (3+x)^{11} + 2x(3+x)^{11}$

$$= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 3^{11-k} \cdot x^k + 2x \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 3^{11-k} \cdot x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 3^{11-k} \cdot x^k + \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 2 \cdot 3^{11-k} \cdot x^{k+1}$$

Suy ra hệ số của x^9 khi triển khai nhị thức trên là: $C_{11}^9 \cdot 3^2 + C_{11}^8 \cdot 2 \cdot 3^3 = 9045$.

Câu 103. Ta có: $(1+2x)^{10} (3+4x+4x^2)^2 = \left(\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^k \cdot x^k \right) \cdot (16x^4 + 32x^3 + 40x^2 + 24x + 9)$

Do đó $a_6 = C_{10}^2 \cdot 2^2 \cdot 16 + C_{10}^3 \cdot 2^3 \cdot 32 + C_{10}^4 \cdot 2^4 \cdot 40 + C_{10}^5 \cdot 2^5 \cdot 24 + C_{10}^6 \cdot 2^6 \cdot 9 = 482496$.

Câu 104. Xét khai triển $(2x+1)^6 = (1+2x)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k 1^{6-k} (2x)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k 2^k x^k$

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^8 = \sum_{j=0}^8 C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^j$$

$$\text{Vậy } (2x+1)^6 \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4 = \sum_{k=0}^6 C_6^k 2^k x^k \cdot \sum_{j=0}^8 C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^j = \sum_{k=0}^6 C_6^k 2^k \cdot \sum_{j=0}^8 C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^{j+k}$$

Số hạng của khai triển chứa x^6 khi $j+k=6$

Xét bảng:

k	0	1	2	3
j	6	5	4	3
$C_6^k 2^k \cdot C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}$	$C_6^0 2^0 \cdot C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$C_6^1 2^1 \cdot C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$C_6^2 2^2 \cdot C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4$	$C_6^3 2^3 \cdot C_8^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5$
k	4	5	6	
j	2	1	0	
$C_6^k 2^k \cdot C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}$	$C_6^4 2^4 \cdot C_8^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6$	$C_6^5 2^5 \cdot C_8^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5$	$C_6^6 2^6 \cdot C_8^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2$	

Vậy hệ số x^6 trong khai triển $(2x+1)^6 \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)^4$ thành đa thức là $\frac{3003}{4} = \frac{1}{4} C_{14}^6$.

Dạng 2.2.4 Dạng kết hợp tích và tổng

Câu 105. Chọn B

Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6$ là $C_6^4 2^4 (-1)^2 = 240$.

Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $(x-3)^8$ là $C_8^5 (-3)^3 = -1512$.

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6 + (x-3)^8$ là $240 - 1512 = -1272$.

Câu 106. Chọn B

$$x(3x-1)^6 + (2x-1)^8 = x \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot (3x)^k (-1)^{6-k} + \sum_{m=0}^8 C_8^m \cdot (2x)^m (-1)^{8-k}$$

$$= \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot 3^k (-1)^{6-k} x^{k+1} + \sum_{m=0}^8 C_8^m \cdot 2^m (-1)^{8-k} x^m$$

Hệ số x^5 ứng với $k = 4; m = 5$.

Hệ số cần tìm là $C_6^4 \cdot 3^4 (-1)^2 + C_8^5 \cdot 2^5 (-1)^3 = -577$.

Câu 107. Chọn A

Hệ số của x^4 trong khai triển nhị thức $(x-2)^6$ là $C_6^4 2^2 = 60$.

Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $(3x-1)^8$ là $C_8^5 (-3)^5 = -13608$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(x-2)^6 + (3x-1)^8$ bằng $-13608 + 60 = -13548$.

Câu 108. Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x(2x-1)^6 + (3x-1)^8 &= x \cdot \sum_{k=0}^6 C_6^k (2x)^{6-k} (-1)^k + \sum_{m=0}^8 C_8^m (3x)^{8-m} (-1)^m \\ &= \sum_{k=0}^6 C_6^k (2)^{6-k} (-1)^k \cdot x^{7-k} + \sum_{m=0}^8 C_8^m (3)^{8-m} (-1)^m \cdot x^{8-m} \end{aligned}$$

Để có số hạng của x^5 trong khai triển thì $k = 2; m = 3$

Do đó hệ số của x^5 trong khai triển bằng: $C_6^2 \cdot 2^4 + C_8^3 \cdot (3)^5 (-1)^3 = -13368$.

Câu 109. Chọn A

Số hạng tổng quát trong khai triển trên có dạng:

$$x \cdot C_6^k \cdot x^k (-2)^{6-k} + C_8^m \cdot (3x)^m \cdot (-1)^{8-m} = C_6^k \cdot x^{k+1} (-2)^{6-k} + C_8^m \cdot 3^m \cdot (-1)^{8-k} \cdot x^m$$

$$\text{Để tìm hệ số của } x^5 \text{ ta cần tìm } k, m \text{ sao cho } \begin{cases} k+1=5 \\ m=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=4 \\ m=5 \end{cases}$$

Hệ số của x^5 cần tìm bằng: $C_6^4 \cdot (-2)^2 + C_8^5 \cdot 3^5 \cdot (-1)^3 = -13548$.

Câu 110. Chọn A

Hệ số của x^5 là

$$C_5^4 \cdot 1^1 \cdot (-1)^4 + C_{10}^3 \cdot 1^7 \cdot 2^3 = 965$$

Câu 111. Khai triển $P(x)$ có số hạng tổng quát $x C_5^k (-2x)^k + x^2 C_{10}^m (3x)^m = (-2)^k C_5^k x^{k+1} + 3^m C_{10}^m x^{m+2}$ ($k \in \mathbb{N}, k \leq 5, m \in \mathbb{N}, m \leq 10$)

$$\text{Hệ số của } x^5 \text{ ứng với } k, m \text{ thỏa hệ } \begin{cases} k+1=5 \\ m+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=4 \\ m=3 \end{cases}$$

Vậy hệ số cần tìm là $(-2)^4 C_5^4 + 3^3 C_{10}^3 = 3320$.

Dạng 3. Ứng dụng nhị thức newton để giải toán

Câu 112. Chọn A.

$$\text{Ta có: } S = 3^{19} C_{20}^0 + 3^{18} C_{20}^1 + 3^{17} C_{20}^2 + \dots + \frac{1}{3} C_{20}^{20}$$

$$3S = 3^{20} C_{20}^0 + 3^{19} C_{20}^1 + 3^{18} C_{20}^2 + \dots + C_{20}^{20}$$

$$\text{Xét khai triển: } (3+1)^{20} = C_{20}^0 3^{20} 1^0 + C_{20}^1 3^{19} 1^1 + C_{20}^2 3^{18} 1^2 + \dots + C_{20}^{20} 3^0 1^{20}$$

$$\Rightarrow (3+1)^{20} = C_{20}^0 3^{20} + C_{20}^1 3^{19} + C_{20}^2 3^{18} + \dots + C_{20}^{20} \Leftrightarrow 3S = 4^{20}$$

Câu 113. Chọn A

$$\text{Ta có } (1+1)^{2017} = \sum_{k=0}^{2017} C_{2017}^k 1^k 1^{2017-k} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + C_{2017}^3 + \dots + C_{2017}^{2017}$$

Vậy $C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + C_{2017}^3 + \dots + C_{2017}^{2017} = 2^{2017} - 1$.

Câu 114. Chọn C

$$\text{Ta có } (1+1)^{2018} = \sum_{i=0}^{2018} C_{2018}^i = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + \dots + C_{2018}^{2018}$$

$$\text{Suy ra } C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + \dots + C_{2018}^{2018} = 2^{2018} - 1.$$

Câu 115. Xét hai khai triển:

$$+2^{2017} = (1+1)^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + C_{2017}^3 + \dots + C_{2017}^{2017} \quad (1).$$

$$+0 = (1-1)^{2017} = C_{2017}^0 - C_{2017}^1 + C_{2017}^2 - C_{2017}^3 + \dots - C_{2017}^{2017} \quad (2)$$

$$\text{Lấy (1)-(2) theo vế ta được: } 2^{2017} = 2(C_{2017}^1 + C_{2017}^3 + C_{2017}^5 + \dots + C_{2017}^{2017}) \Rightarrow T = 2^{2016}.$$

Câu 116. Chọn C

$$\text{Xét tổng } (1+x)^5 = C_5^0 + xC_5^1 + x^2C_5^2 + \dots + x^5C_5^5$$

$$\text{Thay } x=2 \text{ ta được: } S = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \dots + 2^5C_5^5 = (1+2)^5 = 3^5 = 243$$

Câu 117. Chọn B

$$\text{Ta có } (x+1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^k$$

$$\text{Chọn } x=2 \text{ ta có } (2+1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^k \Leftrightarrow S = 3^{10} = 49049.$$

$$\text{Câu 118. Xét khai triển } (1+x)^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 \cdot x + C_{10}^2 \cdot x^2 + C_{10}^3 \cdot x^3 + \dots + C_{10}^{10} \cdot x^{10}.$$

$$\text{Với } x=2 \text{ ta có } (1+2)^{10} = C_{10}^0 + 2C_{10}^1 + 2^2C_{10}^2 + 2^3C_{10}^3 + \dots + 2^{10}C_{10}^{10}.$$

$$\text{Vậy } S = 3^{10} = 59049.$$

$$\text{Câu 119. Ta có: } (1+x)^{2016} = C_{2016}^0 + C_{2016}^1 \cdot x + C_{2016}^2 \cdot x^2 + \dots + C_{2016}^{2016} \cdot x^{2016}.$$

$$\text{Chọn } x=1, \text{ ta có: } 2^{2016} = C_{2016}^0 + C_{2016}^1 + C_{2016}^2 + \dots + C_{2016}^{2016} \text{ hay } C_{2016}^1 + C_{2016}^2 + \dots + C_{2016}^{2016} = 2^{2016} - 1.$$

Câu 120. Chọn C

$$\text{Xét khai triển } (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^n \cdot x^n.$$

$$\text{Cho } x=4 \text{ ta có: } 5^n = C_n^0 + 4C_n^1 + 4^2C_n^2 + \dots + 4^nC_n^n. \text{ Suy ra: } 15625 = 5^n \Leftrightarrow 5^6 = 5^n \Leftrightarrow n=6.$$

Câu 121. Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x \cdot (1+x)^{2019} &= x \cdot \sum_{k=0}^{2019} C_{2019}^k \cdot x^k = x \cdot (C_{2019}^0 + C_{2019}^1 \cdot x + \dots + C_{2019}^{2018} \cdot x^{2018} + C_{2019}^{2019} \cdot x^{2019}). \\ &= C_{2019}^0 \cdot x + C_{2019}^1 \cdot x^2 + \dots + C_{2019}^{2018} \cdot x^{2019} + C_{2019}^{2019} \cdot x^{2020}. \end{aligned}$$

Đạo hàm 2 vế theo biến x ta được.

$$(1+x)^{2019} + 2019x(1+x)^{2018} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 \cdot 2x + \dots + C_{2019}^{2018} \cdot 2019x^{2018} + C_{2019}^{2019} \cdot 2020x^{2019}.$$

$$\text{Cho } x=1 \text{ suy ra } 2^{2019} + 2019 \cdot 2^{2018} = C_{2019}^0 + 2C_{2019}^1 + \dots + 2019C_{2019}^{2018} + 2020C_{2019}^{2019}.$$

$$\Leftrightarrow (2+2019) \cdot 2^{2018} = 1 + S \Leftrightarrow S = 2021 \cdot 2^{2018} - 1.$$

$$\text{Vậy } S = 2021 \cdot 2^{2018} - 1.$$

Câu 122. Chọn C

$$\text{Ta có: } 2^{22} = (1+1)^{22} = C_{22}^0 + C_{22}^1 + C_{22}^2 + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22}.$$

Áp dụng tính chất: $C_n^k = C_n^{n-k}$, suy ra:

$$C_{22}^0 = C_{22}^{22}, C_{22}^1 = C_{22}^{21}, C_{22}^2 = C_{22}^{20}, \dots, C_{22}^{10} = C_{22}^{12}.$$

$$\text{Do đó: } C_{22}^0 + C_{22}^1 + C_{22}^2 + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22} = 2(C_{22}^{12} + C_{22}^{13} + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22}) + C_{22}^{11}.$$

$$\Leftrightarrow C_{22}^{12} + C_{22}^{13} + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22} = \frac{C_{22}^0 + C_{22}^1 + C_{22}^2 + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22} - C_{22}^{11}}{2}$$

$$\Leftrightarrow C_{22}^{12} + C_{22}^{13} + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22} = \frac{2^{22}}{2} - \frac{C_{22}^{11}}{2}$$

$$\Leftrightarrow C_{22}^{12} + C_{22}^{13} + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22} = 2^{21} - \frac{C_{22}^{11}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = 2^{21} - \frac{C_{22}^{11}}{2}.$$

Câu 123. $(1+x)^{2018} = C_{2018}^0 + xC_{2018}^1 + x^2C_{2018}^2 + x^3C_{2018}^3 + \dots + x^{2018}C_{2018}^{2018} \quad (1)$

Đạo hàm 2 vế của đẳng thức (1) ta được:

$$2018(1+x)^{2017} = C_{2018}^1 + 2xC_{2018}^2 + 3x^2C_{2018}^3 + \dots + 2018x^{2017}C_{2018}^{2018}. \text{ Cho } x=1 \text{ ta được:}$$

$$2018 \cdot 2^{2017} = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 + 3C_{2018}^3 + \dots + 2018C_{2018}^{2018}. \quad (2)$$

Đồng thời, thay $x=1$ vào (1) ta cũng có:

$$2^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + C_{2018}^3 + \dots + C_{2018}^{2018}. \quad (3)$$

Lấy (2)+(3) ta được:

$$S = 2018 \cdot 2^{2017} + 2^{2018} = C_{2018}^0 + 2C_{2018}^1 + 3C_{2018}^2 + \dots + 2018C_{2018}^{2017} + 2019C_{2018}^{2018}.$$

$$\text{Vậy } S = 1009 \cdot 2^{2018} + 2^{2018} = 1010 \cdot 2^{2018}.$$

Câu 124. Ta có $\frac{x^k}{k!} \cdot \frac{(1-x)^{10-k}}{(10-k)!} = \frac{1}{10!} \cdot \frac{10!}{k!(10-k)!} \cdot x^k \cdot (1-x)^{10-k} = \frac{1}{10!} \cdot C_{10}^k \cdot x^k \cdot (1-x)^{10-k}$ với $0 \leq k \leq 10$.

$$\frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^9}{9!} \cdot \frac{(1-x)}{1!} + \frac{x^8}{8!} \cdot \frac{(1-x)^2}{2!} + \dots + \frac{(1-x)^{10}}{10!} = \frac{1}{10!} \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^k \cdot (1-x)^{10-k} = \frac{1}{10!} (x+1-x)^{10} = \frac{1}{10!}.$$

Câu 125. $S = 2 + (C_1^0 + C_2^0 + \dots + C_n^0) + (C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1) + \dots + (C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}) + C_n^n$
 $= 2 + (C_1^0 + C_1^1) + (C_2^0 + C_2^1 + C_2^2) + \dots + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) + (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n)$
 $= 2 + 2 + (1+1)^2 + \dots + (1+1)^{n-1} + (1+1)^n$

$$= 2 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 + 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow S = 2^{n+1}.$$

$$S \text{ là một số có 1000 chữ số} \Rightarrow 10^{999} \leq S < 10^{1000} \Leftrightarrow 10^{999} \leq 2^{n+1} < 10^{1000}$$

$$\Leftrightarrow 999 \log_2 10 - 1 \leq n < 1000 \log_2 10 - 1$$

$$\text{Do } n \in \mathbb{N} \text{ nên } n \in \{3318; 3319; 3320\}.$$

Vậy có 3 số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 126. Chọn B

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{5!(n-5)!} + \dots + \frac{n!}{(n-1)!!} = 1024$$

$$\Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^n = 1024 \quad (1).$$

$$\text{Ta chứng minh đẳng thức } C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^n = 2^{n-1} \quad (2).$$

$$\text{Thật vậy, xét } (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^n x^n.$$

Với n là số nguyên dương

Thay $x = 1$ thì $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.

Thay $x = -1$ thì $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots - C_n^{n-1} + C_n^n$

$$\Rightarrow \underbrace{C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n}_A = \underbrace{C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1}}_B.$$

Từ đó ta có:
$$\begin{cases} A = B \\ A + B = 2^n \end{cases} \Leftrightarrow 2B = 2^n \Leftrightarrow B = 2^{n-1}.$$

Do đó đẳng thức (2) được chứng minh.

Thay vào (1) $2^{n-1} = 1024 = 2^{10}$ nên $n = 11$, chọn đáp án **B**