

## PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

### 1) Phương trình $\sin x = a$

**Trường hợp**  $|a| > 1 \longrightarrow$  phương trình vô nghiệm, vì  $-1 \leq \sin x \leq 1$  với mọi  $x$ .

**Trường hợp**  $|a| \leq 1 \longrightarrow$  phương trình có nghiệm, cụ thể:

$$\bullet a \in \left\{ 0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1 \right\}. \text{ Khi đó}$$

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet a \notin \left\{ 0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1 \right\}. \text{ Khi đó } \sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

### 2) Phương trình $\cos x = a$

**Trường hợp**  $|a| > 1 \longrightarrow$  phương trình vô nghiệm, vì  $-1 \leq \cos x \leq 1$  với mọi  $x$ .

**Trường hợp**  $|a| \leq 1 \longrightarrow$  phương trình có nghiệm, cụ thể:

$$\bullet a \in \left\{ 0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1 \right\}. \text{ Khi đó}$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet a \notin \left\{ 0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1 \right\}. \text{ Khi đó } \cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

### 3) Phương trình $\tan x = a$

Điều kiện:  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

$$\bullet a \in \left\{ 0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}. \text{ Khi đó } \tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet a \notin \left\{ 0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}. \text{ Khi đó } \tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

### 4) Phương trình $\cot x = a$

Điều kiện:  $x \neq \pi + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

$$\bullet a \in \left\{ 0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}. \text{ Khi đó } \cot x = a \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet a \notin \left\{ 0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}. \text{ Khi đó } \cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Giải phương trình  $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

**A.**  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). **B.**  $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k3\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**C.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**D.**  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Lời giải.** Phương trình  $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). **Chọn D.**

**Câu 2.** Số nghiệm của phương trình  $\sin(2x - 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  với  $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$  là?

**A.** 2.

**B.** 4.

**C.** 6.

**D.** 7.

**Lời giải.** Phương trình  $\sin(2x - 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x - 40^\circ) = \sin 60^\circ$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ 2x - 40^\circ = 180^\circ - 60^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 100^\circ + k360^\circ \\ 2x = 160^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50^\circ + k180^\circ \\ x = 80^\circ + k180^\circ \end{cases}$$

• Xét nghiệm  $x = 50^\circ + k180^\circ$ . Vì  $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ \longrightarrow -180^\circ \leq 50^\circ + k180^\circ \leq 180^\circ$

$$\Leftrightarrow -\frac{23}{18} \leq k \leq \frac{13}{18} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = -1 \rightarrow x = -130^\circ \\ k = 0 \rightarrow x = 50^\circ \end{cases}$$

• Xét nghiệm  $x = 80^\circ + k180^\circ$ . Vì  $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ \longrightarrow -180^\circ \leq 80^\circ + k180^\circ \leq 180^\circ$

$$\Leftrightarrow -\frac{13}{9} \leq k \leq \frac{5}{9} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = -1 \rightarrow x = -100^\circ \\ k = 0 \rightarrow x = 80^\circ \end{cases}$$

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn bài toán. **Chọn B.**

**Cách 2 (CASIO).** Ta có  $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ \longrightarrow -360^\circ \leq 2x \leq 360^\circ$ .

Chuyển máy về chế độ DEG, dùng chức năng TABLE nhập hàm  $f(X) = \sin(2X - 40) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

với các thiết lập Start = -360, End = 360, Step = 40. Quan sát bảng giá trị của  $f(X)$  ta suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm.

**Câu 3.** Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  trên đường tròn lượng giác là?

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 4.

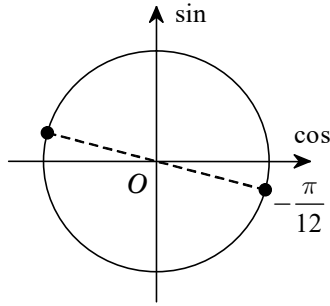
**D.** 6.

**Lời giải.**

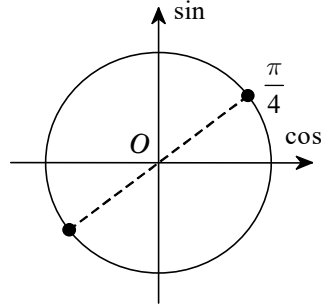
$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Biểu diễn nghiệm  $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$  trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí (hình 1).

Biểu diễn nghiệm  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí (hình 2).



Hình 1



Hình 2

Vậy có tất cả 4 vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình. **Chọn C.**

**Cách trắc nghiệm.** Ta đưa về dạng  $x = \alpha + k \frac{2\pi}{n} \longrightarrow$  số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là  $n$ .

- Xét  $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{2} \longrightarrow$  có 2 vị trí biểu diễn.
- Xét  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{2\pi}{2} \longrightarrow$  có 2 vị trí biểu diễn.

Nhận xét. Cách trắc nghiệm tuy nhanh nhưng cần thận các vị trí có thể trùng nhau.

**Câu 4.** Với những giá trị nào của  $x$  thì giá trị của các hàm số  $y = \sin 3x$  và  $y = \sin x$  bằng nhau?

- A.  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$       B.  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$
- C.  $x = k \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$       D.  $x = k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

**Lời giải.** Xét phương trình hoành độ giao điểm:  $\sin 3x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{Chọn B.}$$

**Câu 5.** Gọi  $x_0$  là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình  $\frac{2 \cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.  $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$       B.  $x_0 \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$       C.  $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right).$       D.  $x_0 \in \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right).$

**Lời giải.** Điều kiện:  $1 - \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 1$ .

$$\text{Phương trình } \frac{2 \cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \xrightarrow{\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1} \begin{cases} \sin 2x = 1 (\text{loại}) \\ \sin 2x = -1 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Cho } -\frac{\pi}{4} + k\pi > 0 \longrightarrow k > \frac{1}{4}.$$

Do đó nghiệm dương nhỏ nhất ứng với  $k = 1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right).$  **Chọn D.**

**Câu 6.** Hỏi trên đoạn  $[-2017; 2017]$ , phương trình  $(\sin x + 1)(\sin x - \sqrt{2}) = 0$  có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 4034.

B. 4035.

C. 641.

D. 642.

**Lời giải.** Phương trình  $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \sqrt{2} \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$

Theo giả thiết  $-2017 \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 2017 \Leftrightarrow \frac{-2017 + \frac{\pi}{2}}{2\pi} \leq k \leq \frac{2017 + \frac{\pi}{2}}{2\pi}$   
 $\xrightarrow{\text{xấp xỉ}} -320,765 \leq k \leq 321,265 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-320; -319; \dots; 321\}.$

Vậy có tất cả 642 giá trị nguyên của  $k$  tương ứng với có 642 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn D.**

**Câu 7.** Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  bằng:

A.  $\frac{\pi}{9}.$

B.  $-\frac{\pi}{6}.$

C.  $\frac{\pi}{6}.$

D.  $-\frac{\pi}{9}.$

**Lời giải.** Ta có  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ 3x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$

**TH1.** Với  $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \xrightarrow{\text{cho}} \begin{cases} x > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{7}{24} \Rightarrow k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{7\pi}{36} \\ x < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{7}{24} \Rightarrow k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{17\pi}{36} \end{cases}.$

**TH2.** Với  $x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \xrightarrow{\text{cho}} \begin{cases} x > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{11}{24} \Rightarrow k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{11\pi}{36} \\ x < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{11}{24} \Rightarrow k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{13\pi}{36} \end{cases}.$

So sánh bốn nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất là  $x = -\frac{13\pi}{36}$  và nghiệm dương nhỏ nhất là

$x = \frac{7\pi}{36}$ . Khi đó tổng hai nghiệm này bằng  $-\frac{13\pi}{36} + \frac{7\pi}{36} = -\frac{\pi}{6}$ . **Chọn B.**

**Câu 8.** Gọi  $x_0$  là nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $\cos(5x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A.  $x_0 \in (-30^\circ; 0^\circ)$ .

B.  $x_0 \in (-45^\circ; -30^\circ)$ .

C.  $x_0 \in (-60^\circ; -45^\circ)$ .

D.  $x_0 \in (-90^\circ; -60^\circ)$ .

**Lời giải.** Ta có  $\cos(5x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(5x - 45^\circ) = \cos 30^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 45^\circ = 30^\circ + k360^\circ \\ 5x - 45^\circ = -30^\circ + k360^\circ \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 75^0 + k360^0 \\ 5x = 15^0 + k360^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^0 + k72^0 \\ x = 3^0 + k72^0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**TH1.** Với  $x = 15^0 + k72^0 < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{5}{24} \Rightarrow k_{\max} = -1 \rightarrow x = -57^0$ .

**TH2.** Với  $x = 3^0 + k72^0 < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{24} \Rightarrow k_{\max} = -1 \Rightarrow x = -69^0$ .

So sánh hai nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất của phương trình là  $x = -57^0$ .

**Chọn C.**

**Câu 9.** Hỏi trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ , phương trình  $\cos x = \frac{13}{14}$  có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

**Lời giải.** Phương trình  $\cos x = \frac{13}{14} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{13}{14} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

• Với  $x = \arccos \frac{13}{14} + k2\pi$ . Vì  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \arccos \frac{13}{14} + k2\pi \leq 2\pi$

$\xrightarrow{\text{CASIO}} -0,3105 \leq k \leq 0,9394 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0 \rightarrow x = \arccos \frac{13}{14}$ .

• Với  $x = -\arccos \frac{13}{14} + k2\pi$ . Vì  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq -\arccos \frac{13}{14} + k2\pi \leq 2\pi$

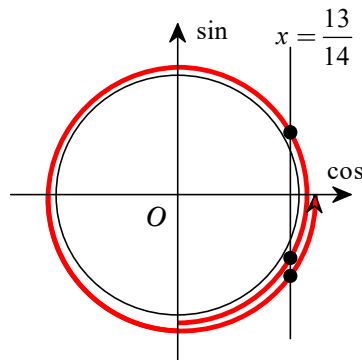
$\xrightarrow{\text{CASIO}} -0,1894 \leq k \leq 1,0605 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1\} \rightarrow x \in \left\{-\arccos \frac{13}{14}; -\arccos \frac{13}{14} + k2\pi\right\}$ .

Vậy có tất cả 3 nghiệm thỏa mãn. **Chọn B.**

**Cách 2 (CASIO).** Dùng chức năng TABLE nhập hàm  $f(X) = \cos X - \frac{13}{14}$  với các thiết lập

Start =  $-\frac{\pi}{2}$ , End =  $2\pi$ , Step =  $\frac{\pi}{7}$ . Ta thấy  $f(X)$  đổi dấu 3 lần nên có 3 nghiệm.

**Cách 3.** Dùng đường tròn lượng giác



Vẽ đường tròn lượng giác và biểu diễn cung từ  $-\frac{\pi}{2}$  đến  $2\pi$ . Tiếp theo ta kẻ đường thẳng

$x = \frac{13}{14}$ . Nhìn hình vẽ ta thấy đường thẳng  $x = \frac{13}{14}$  cắt cung lượng giác vừa vẽ tại 3 điểm.

**Câu 10.** Gọi  $X$  là tập nghiệm của phương trình  $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^0\right) = \sin x$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A.  $290^0 \in X$ .

B.  $20^0 \in X$ .

C.  $220^0 \in X$ .

D.  $240^0 \in X$ .

**Lời giải.** Ta có  $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \cos(90^\circ - x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + 15^\circ = 90^\circ - x + k360^\circ \\ \frac{x}{2} + 15^\circ = -(90^\circ - x) + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50^\circ + k240^\circ \\ x = 210^\circ - k720^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nhận thấy  $290^\circ \in X$  (do ứng với  $k = 1$  của nghiệm  $x = 50^\circ + k240^\circ$ ). **Chọn A.**

**Câu 11.** Tính tổng  $T$  các nghiệm của phương trình  $\sin 2x - \cos x = 0$  trên  $[0; 2\pi]$ .

**A.**  $T = 3\pi$ .      **B.**  $T = \frac{5\pi}{2}$ .      **C.**  $T = 2\pi$ .      **D.**  $T = \pi$ .

**Lời giải.** Ta có  $\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Vì  $x \in [0; 2\pi]$ , suy ra  $\begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \leq 2\pi \\ 0 \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{11}{4} \\ -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\}$ .

Từ đó suy ra các nghiệm của phương trình trên đoạn  $[0; 2\pi]$  là  $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rightarrow T = 3\pi$ .

**Chọn A.**

**Câu 12.** Trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ , phương trình  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin x$  có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 3.      **B.** 4.      **C.** 5.      **D.** 2.

**Lời giải.** Ta có  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ \frac{\pi}{6} - 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} - \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $x \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ , suy ra  $\begin{cases} \frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{3} - k2\pi < 2\pi \\ \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{9} - \frac{k2\pi}{3} < 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{6} \leq k < -\frac{5}{12} \\ -\frac{8}{3} \leq k < -\frac{5}{12} \end{cases} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -1$ .

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ . **Chọn A.**

**Câu 13.** Tổng các nghiệm của phương trình  $\tan(2x - 15^\circ) = 1$  trên khoảng  $(-90^\circ; 90^\circ)$  bằng:

**A.**  $0^\circ$ .      **B.**  $-30^\circ$ .      **C.**  $30^\circ$ .      **D.**  $-60^\circ$ .

**Lời giải.** Ta có  $\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow 2x - 15^\circ = 45^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Do  $x \in (-90^\circ; 90^\circ) \rightarrow -90^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{2}{3}$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = -1 \rightarrow x = -60^\circ \\ k = 0 \rightarrow x = 30^\circ \end{cases} \longrightarrow -60^\circ + 30^\circ = -30^\circ. \text{ Chọn B.}$$

**Câu 14.** Giải phương trình  $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$ .

$$\begin{array}{ll} \text{A. } x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}). & \text{B. } x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ \text{C. } x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}). & \text{D. } x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{array}$$

**Lời giải.** Ta có  $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot(3x - 1) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{k=1} x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18}. \text{ Chọn A.}$$

**Câu 15.** Với những giá trị nào của  $x$  thì giá trị của các hàm số  $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$  và  $y = \tan 2x$  bằng nhau?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}). & \text{B. } x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ \text{C. } x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). & \text{D. } x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \quad \left(k \neq \frac{3m+1}{2}; k, m \in \mathbb{Z}\right). \end{array}$$

**Lời giải.** Điều kiện: 
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} - m\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}.$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm:  $\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện, ta cần có  $\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k \neq \frac{3m+1}{2} \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \quad \left(k \neq \frac{3m+1}{2}; k, m \in \mathbb{Z}\right). \text{ Chọn D.}$

**Câu 16.** Số nghiệm của phương trình  $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11}$  trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$  là?

$$\text{A. 1} \qquad \text{B. 2.} \qquad \text{C. 3.} \qquad \text{D. 4.}$$

**Lời giải.** Ta có  $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{11} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Do  $x \in \left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right) \rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{11} + k\pi < 2\pi \xrightarrow{\text{CASIO xấp xỉ}} -0,027 < k < 1,72 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1\}. \text{ Chọn B.}$

**Câu 17.** Tổng các nghiệm của phương trình  $\tan 5x - \tan x = 0$  trên nửa khoảng  $[0; \pi)$  bằng:

$$\text{A. } \pi. \qquad \text{B. } \frac{3\pi}{2}. \qquad \text{C. } 2\pi. \qquad \text{D. } \frac{5\pi}{2}.$$

**Lời giải.** Ta có  $\tan 5x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Vì  $x \in [0; \pi)$ , suy ra  $0 \leq \frac{k\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 \leq k < 4 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = \{0; 1; 2; 3\}.$

Suy ra các nghiệm của phương trình trên  $[0; \pi)$  là  $\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right\}$ .

Suy ra  $0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ . **Chọn B.**

**Câu 18.** Giải phương trình  $\tan 3x \cdot \cot 2x = 1$ .

**A.**  $x = k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**B.**  $x = -\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**C.**  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). **D.** Vô nghiệm.

**Lời giải.** Điều kiện: 
$$\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3} \\ x \neq k \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Phương trình  $\Leftrightarrow \tan 3x = \frac{1}{\cot 2x} \Leftrightarrow \tan 3x = \tan 2x \Leftrightarrow 3x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Đối chiếu điều kiện, ta thấy nghiệm  $x = k\pi$  không thỏa mãn  $x \neq k \frac{\pi}{2}$ .

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. **Chọn D.**

**Câu 19.** Cho  $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0$ . Tính  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ .

**A.**  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ .

**B.**  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**C.**  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**D.**  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ .

**Lời giải.** Phương trình  $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Suy ra } 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \longrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do đó } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Chọn C.}$$

**Câu 20.** Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình  $\tan x = 1$ ?

**A.**  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**B.**  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**C.**  $\cot x = 1$ .

**D.**  $\cot^2 x = 1$ .

**Lời giải.** Ta có  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Xét đáp án C, ta có  $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). **Chọn C.**

**Cách 2.** Ta có đẳng thức  $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ . Kết hợp với giả thiết  $\tan x = 1$ , ta được  $\cot x = 1$ . Vậy hai phương trình  $\tan x = 1$  và  $\cot x = 1$  là tương đương.

**Câu 21.** Giải phương trình  $\cos 2x \tan x = 0$ .



A.  $x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải.** Điều kiện:  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

Phương trình  $\cos 2x \tan x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \tan x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = k\pi \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$ . **Chọn C.**

**Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x = m$  có nghiệm.

A.  $m \leq 1$ .      B.  $m \geq -1$ .      C.  $-1 \leq m \leq 1$ .      D.  $m \leq -1$ .

**Lời giải.** Với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , ta luôn có  $-1 \leq \sin x \leq 1$ .

Do đó, phương trình  $\sin x = m$  có nghiệm khi và chỉ khi  $-1 \leq m \leq 1$ . **Chọn C.**

**Câu 23.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\cos x - m = 0$  vô nghiệm.

A.  $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ .      B.  $m \in (1; +\infty)$ .  
C.  $m \in [-1; 1]$ .      D.  $m \in (-\infty; -1)$ .

**Lời giải.** Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình  $\cos x = a$ .

- Phương trình có nghiệm khi  $|a| \leq 1$ .
- Phương trình vô nghiệm khi  $|a| > 1$ .

Phương trình  $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$ .

Do đó, phương trình  $\cos x = m$  vô nghiệm  $\Leftrightarrow |m| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$ . **Chọn A.**

**Câu 24.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\cos x = m + 1$  có nghiệm?

A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. Vô số.

**Lời giải.** Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình  $\cos x = a$ .

- Phương trình có nghiệm khi  $|a| \leq 1$ .
- Phương trình vô nghiệm khi  $|a| > 1$ .

Do đó, phương trình  $\cos x = m + 1$  có nghiệm khi và chỉ khi  $|m + 1| \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; -1; 0\}$ . **Chọn C.**

**Câu 25.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$  có nghiệm. Tính tổng  $T$  của các phần tử trong  $S$ .

A.  $T = 6$ .      B.  $T = 3$ .      C.  $T = -2$ .      D.  $T = -6$ .

**Lời giải.** Phương trình  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = m + 2$ .

Phương trình có nghiệm  $\Leftrightarrow -1 \leq m + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} S = \{-3; -2; -1\} \longrightarrow T = (-3) + (-2) + (-1) = -6$ . **Chọn D.**