Câu 1. Cho hàm số $y=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-x^3-\frac{1}{5}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$, hàm số đạt cực đại tại $x=1$.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$ và $x=1$, hàm số đạt cực đại tại $x=0$.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và $x=1$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Câu 2. Hàm số $y=\frac{x^2-3}{x-2}$ đạt cực đại tại

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=0$.

Câu 5. Cho hàm số $y=\sin x+2$. Tìm giá trị cực đại của hàm số trên đoạn $[-\pi;\pi]$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6. Cho hàm số $y=\frac{\cos x+2}{\cos x-1}$ có bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $\left[-\frac{7\pi}{2};\frac{5\pi}{4}\right]$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 7. Cho hàm số $y=\frac{a\sin x-\cos x-1}{a\cos x}$ với $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tìm số điểm cực trị của hàm số đã cho trên khoảng $\left(0;\frac{9\pi}{4}\right)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8. Hàm số $y=\sin 2x-x$ đạt cực tiểu tại

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{5\pi}{6}$. **D.** $\frac{7\pi}{6}$.

Câu 9. Hàm số $y=\sin^6\frac{x}{4}+\cos^6\frac{x}{4}$ đạt cực đại tại các điểm nào ?

A. $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **C.** $x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 29. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** 5.

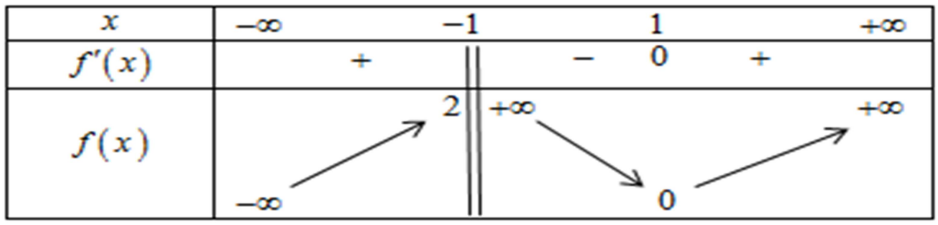
Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Diện tích tam giác tạo bởi 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 4. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

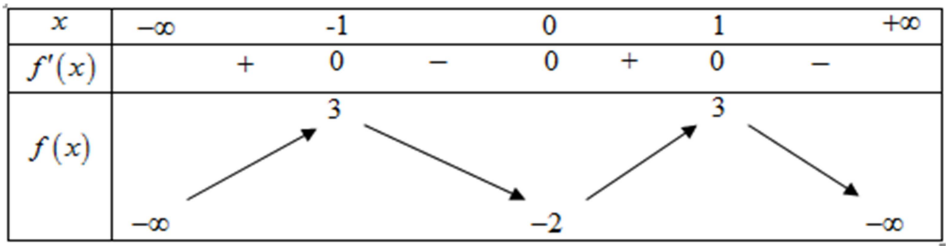
Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số không có cực trị.
B. Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=-1$.
C. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=1$.
D. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

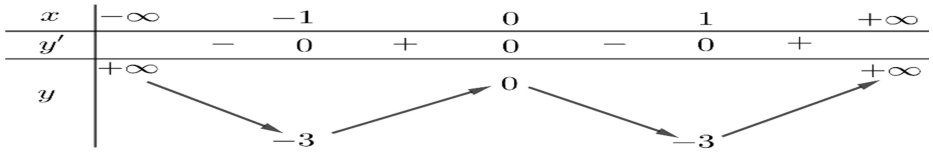
Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g(x)=f(x+1)$ đạt cực tiểu tại

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=0$.

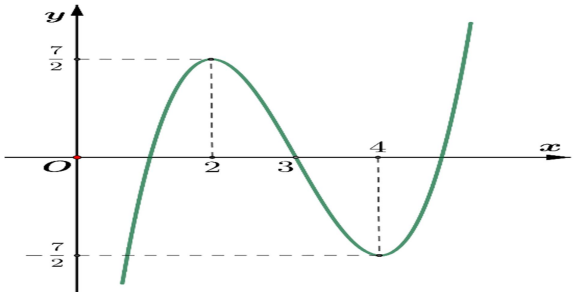
Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:



Hàm số $g(x)=f(2x-1)$ đạt cực đại tại

A. $x=0$. **B.** $x=\frac{1}{2}$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

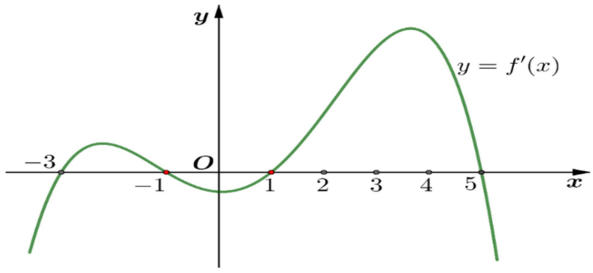
Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Giá trị cực đại của hàm số $g(x)=f(x)+1$ là

A. 2. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 4. **D.** $\frac{9}{2}$.

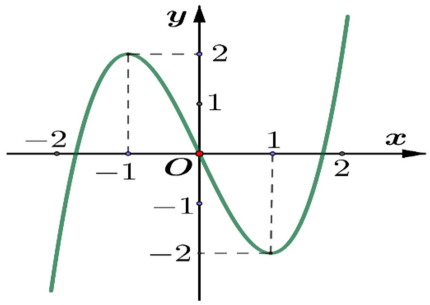
Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=f(x)$ có

A. hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
B. một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.
C. hai điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.
D. một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

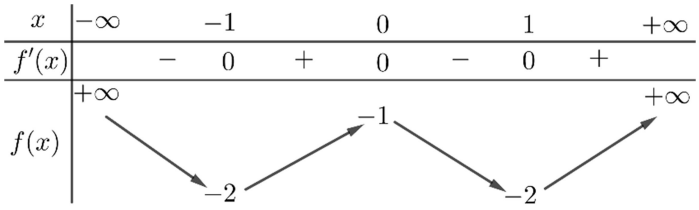
Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

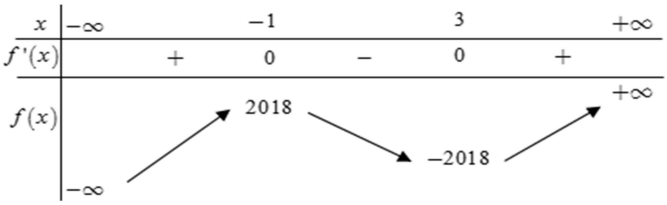
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3\left(x^3+3x\right)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

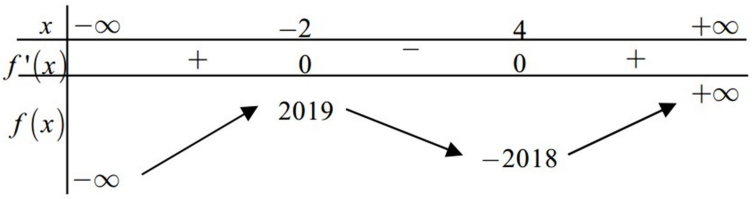
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x)=\left|f(x-2017)+2018\right|$ có bao nhiêu cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

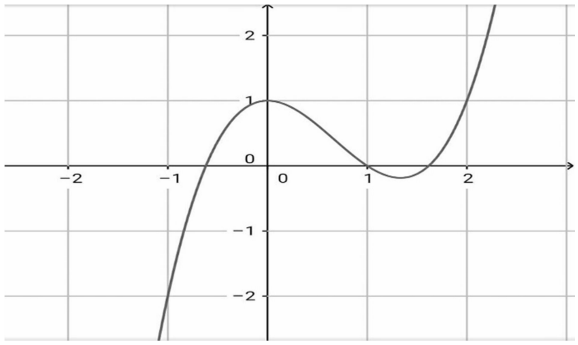
Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tìm giá trị cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x\right)-\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x-\frac{2}{15}$ trên đoạn $[-1;2]$?

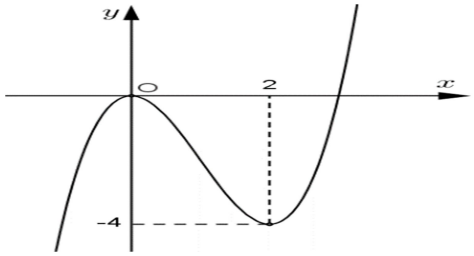
A. 2022. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?



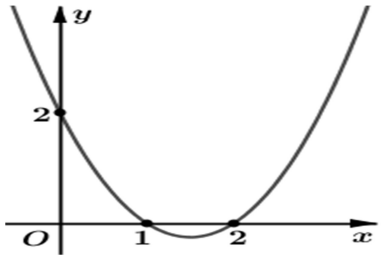
A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=2$.

Câu 22. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f(x)\right]$.



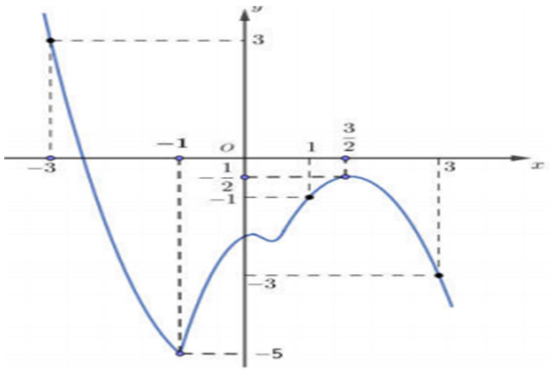
A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(1-x^2\right)$ + 2019 có mấy điểm cực trị ?



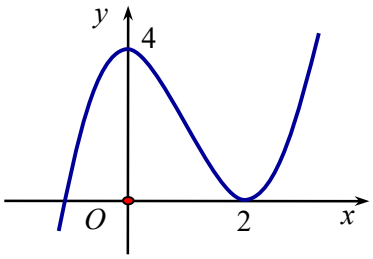
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(1-x)+\frac{x^2}{2}-x$.



A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)$. Hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai cực trị?

A. $m>3$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m<3$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(2m-6)x^3-(m+2)x^2+(m+2)x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai cực trị?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 28. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3mx^2+2mx-1$ không có cực trị là

A. $0<m<\frac{4}{3}$. **B.** $0\le m\le\frac{4}{3}$. **C.** $-\frac{4}{3}\le m\le 0$. **D.** $-\frac{4}{3}<m<0$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(m-1)x^3-(m-1)x^2+2mx+m+3$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 2019 của tham số m để hàm số trên không có cực trị?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 30. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào sau đấy đúng?

A. $m_0\in(-1;7)$. **B.** $m_0\in(7;10)$. **C.** $m_0\in(-7;-1)$. **D.** $m_0\in(-15;-7)$.

Câu 31. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu , đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

A. $\frac{5}{4}\le m\le\frac{7}{5}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<\frac{5}{4} \\ m>\frac{7}{5}\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ \frac{5}{4}<m<\frac{7}{5}\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le\frac{5}{4} \\ m\ge\frac{7}{5}\end{array}\right.$.

Câu 32. Cho hàm số $y=x^3-3mx+m-1$ có đồ thị (C), với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị (C) có hai điểm cực trị là A, B cùng với điểm $C(0;-1)$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 10?

A. 7. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 4.

Câu 33. Đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm $M(2m^3;m)$ tạo với hai điểm A và B một tam giác có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-7;-3)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(3;7)$. **D.** $(7;13)$.

Câu 34. Cho hàm số $y=x^3+2x^2+(m-3)x+m$ (m là tham số), có đồ thị (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của m để (C_m) có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m).

A. $m=-5$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-1$.

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $m=\dfrac{1}{6}$. **B.** $m=\dfrac{-1}{3}$. **C.** $m=\dfrac{1}{3}$. **D.** $m=\dfrac{-1}{6}$.

Câu 36. Cho hàm số $y=(m+1)x^4-2x^2+1$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị đều nhỏ hơn 1.

A. $-1<m<0$. **B.** $m>-1$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m>0$.

Câu 37. Cho hàm số $y=(m-2)x^4+(m-1)x^2-3$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị.

A. $m\in[2;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;1]\cup(2;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;1]$. **D.** $m\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Câu 38. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+1$ đều thuộc khoảng $(-1;1)$.

A. $(-1;1)$. **B.** $\left(-\dfrac{4}{5};0\right)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 39. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m^2-m+1)x^2+m-1$ có 3 điểm cực trị, đồng thời hoành độ hai điểm cực tiểu x_1; x_2 thỏa điều kiện $|x_1-x_2|\le 2$.

A. $\left(0;\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. **B.** $\left[\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. **C.** $(0;1]$. **D.** $[0;1]$.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+2m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho O, A, B, C là bốn đỉnh của một hình thoi (với O là gốc tọa độ).

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Câu 41. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0;-3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(\dfrac{9}{5};2\right)$. **B.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{5}\right)$.

Câu 42. Để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nào?

A. $(0;2)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 43. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A,B. Khi $\widehat{AOB}=90°$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** 8. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** 16.

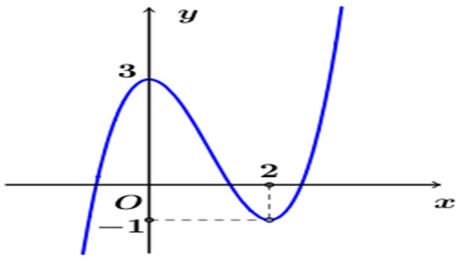
Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+mx^2$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. $m\le 0$. **B.** $m=0$. **C.** $m>0$. **D.** $m\ge 0$.

Câu 45. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 46. Cho đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+3$ như hình vẽ bên dưới



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=|x^3-3x^2+3|$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 47. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ thỏa mãn $c>2019$, $a+b+c-2018<0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2019|$

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

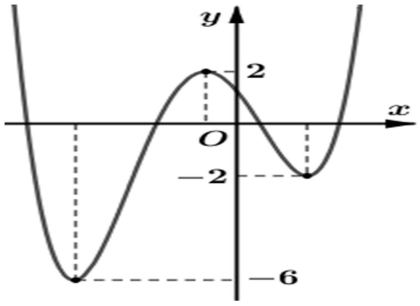
Câu 48. Số nguyên bé nhất của tham số m sao cho hàm số $y=|x|^3-2mx^2+5|x|-3$ có 5 điểm cực trị là

A. -2. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)=x^4-(2m+1)x^3+(m+4)x^2+(5m-6)x+2m-12$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=|f(x)|$ có số điểm cực trị nhiều nhất ?

A. 15. **B.** 16. **C.** 13. **D.** 14.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tính tổng bình phương tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=\left|f(x+2019)+3-2m\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 1. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 13.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	**2.A**	**3.B**	**4.C**	**5.C**	**6.C**	**7.C**	**8.C**	**9.A**	**10.C**
11.D	**12.C**	**13.B**	**14.B**	**15.D**	**16.C**	**17.C**	**18.B**	**19.B**	**20.D**
21.B	**22.C**	**23.A**	**24.B**	**25.C**	**26.D**	**27.B**	**28.B**	**29.A**	**30.D**
31.C	**32.D**	**33.B**	**34.B**	**35.D**	**36.D**	**37.D**	**38.D**	**39.D**	**40.B**
41.D	**42.B**	**43.A**	**44.D**	**45.C**	**46.D**	**47.B**	**48.B**	**49.D**	**50.B**

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. [2D1-2.2-2] Cho hàm số $y=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-x^3-\frac{1}{5}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$; đạt cực tiểu tại $x=1$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$; đạt cực đại tại $x=1$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$ và $x=1$; đạt cực đại tại $x=0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và $x=1$; đạt cực tiểu tại $x=0$.

Lời giải

Ta có: $y'=x^4+2x^3-3x^2=x^2\left(x^2+2x-3\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-3\end{array}\right.$ ($x=0$ là nghiệm kép)

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↘		↗	$+\infty$

Câu 2. [2D1-2.2-2] Hàm số $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ đạt cực đại tại

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=0$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Ta có: $y'=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có điểm cực đại là $x=1$

Câu 5. [2D1-2.2-2] Cho hàm số $y=\sin x+2$. Tìm giá trị cực đại của hàm số trên đoạn $[-\pi;\pi]$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$y=\sin x+2$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=\cos x$

$y'=0\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

Do $x\in[-\pi;\pi]$ nên $x=\left\{-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Bảng biến thiên

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$		π
y'		$-$	0	$+$	0		
y	2	↘	1 (CT)	↗	3 (CĐ)	↘	2

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: giá trị cực đại của hàm số là 3 trên đoạn $[-\pi;\pi]$.

Cách 2: Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=\cos x$

$y'=0\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

Do $x\in[-\pi;\pi]$ nên $x\in\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$.

$y''=-\sin x$

Ta có: $y''\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1>0\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị cực tiểu tại $x=-\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Giá trị cực tiểu của hàm số là $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Ta có: $y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1<0\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị cực đại tại $x=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Giá trị cực tiểu của hàm số là $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$.

Vậy, giá trị cực đại của hàm số là 3 trên đoạn $[-\pi;\pi]$.

Câu 6. [2D1-2.2-3] Cho hàm số $y=\frac{\cos x+2}{\cos x-1}$ có bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $\left[-\frac{7\pi}{2};\frac{5\pi}{4}\right]$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$y=\frac{\cos x+2}{\cos x-1}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

$y'=\frac{-\sin x(\cos x-1)-(-\sin x)(\cos x+2)}{(\cos x-1)^2}$

$=\frac{-\sin x.\cos x+\sin x+\sin x.\cos x+2\sin x}{(\cos x-1)^2}=\frac{3\sin x}{(\cos x-1)^2}$

$y'=0\Rightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

So với điều kiện ta có: $x=\pi+k2\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

Do $x\in\left[-\frac{7\pi}{2};\frac{5\pi}{4}\right]$ nên $x\in\{-3\pi;-\pi;\pi\}$.

Bảng biến thiên

x	$-\frac{7\pi}{2}$		-3π		-2π		$-\pi$		0		π		$\frac{5\pi}{4}$
y'		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
y	-2	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-5+3\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số có 3 điểm cực trị trên đoạn $\left[-\frac{7\pi}{2};\frac{5\pi}{4}\right]$.

Câu 7. **[2D1-2.2-3]** Cho hàm số $y=\frac{a\sin x-\cos x-1}{a\cos x}$ với $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tìm số điểm cực trị của hàm số đã cho trên khoảng $\left(0;\frac{9\pi}{4}\right)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

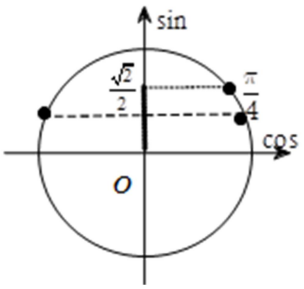
Chọn C

$y=\frac{a\sin x-\cos x-1}{a\cos x}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

$y'=\frac{a-\sin x}{a\cos^2 x}$; $y'=0\Leftrightarrow\sin x=a$

Do $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên phương trình $\sin x=a$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(0;\frac{9\pi}{4}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$



$y''=\frac{-\sin^2 x+2a\sin x-1}{a\cos^3 x}$

Với $\sin x=a$ thì

$$y''=\frac{-\sin^2 x+2a\sin x-1}{a\cos^3 x}=\frac{-a^2+2a^2-1}{a.\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}=\frac{a^2-1}{a\left(1-a^2\right)\cos x}=\frac{-1}{\sin x.\cos x}\neq 0$$

Do đó, hàm số đã cho có 3 điểm cực trị trên khoảng $\left(0;\frac{9\pi}{4}\right)$.

Câu 8. **[2D1-2.2-2]** Hàm số $y=\sin 2x-x$ đạt cực tiểu tại

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{5\pi}{6}$. **D.** $\frac{7\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y=\sin 2x-x \Rightarrow y'=2\cos 2x-1 \Rightarrow y''=-4\sin 2x$.

Xét $y'=0 \Leftrightarrow 2\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Vì $y''\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)=-2\sqrt{3}<0 \ \ \forall k\in\mathbb{Z}$ nên $x=\frac{\pi}{6}+k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z})$ là điểm cực đại của hàm số.

Vì $y''\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi\right)=2\sqrt{3}>0 \ \ \forall k\in\mathbb{Z}$ nên $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z})$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Kiểm tra 4 đáp án ta có $\frac{5\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+\pi$. Vậy chọn **C**.

Câu 9. [2D1-2.2-3] Hàm số $y=\sin^6\frac{x}{4}+\cos^6\frac{x}{4}$ đạt cực đại tại các điểm nào ?

A. $x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có $y=\sin^6\frac{x}{4}+\cos^6\frac{x}{4}=\left(\sin^2\frac{x}{4}\right)^3+\left(\cos^2\frac{x}{4}\right)^3=\left(\sin^2\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4}\right)^3-3\sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}$

$=1-\frac{3}{4}\sin^2\frac{x}{2}=1-\frac{3}{4}.\frac{1-\cos x}{2}=\frac{5+3\cos x}{8}$

Ta có $y'=-\frac{3}{8}\sin x$

$y'=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2k\pi \\ x=(2k+1)\pi \end{array}\right., \ k\in\mathbb{Z}$

$y''=-\frac{3}{8}\cos x$

+) $y''(2k\pi)=-\frac{3}{8}\cos(2k\pi)=-\frac{3}{8}<0$. Suy ra hàm số đạt cực đại tại các điểm $x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

+) $y''[(2k+1)\pi]=-\frac{3}{8}\cos\pi=\frac{3}{8}>0$. Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 10. [2D1-2.3-2] Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 29. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** 5.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị là: $M(2;3), N(4;-2)$.

$\Rightarrow MN=\sqrt{(4-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{29}$.

Câu 11. [2D1-2.3-2] Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Diện tích tam giác tạo bởi 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 4. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

+ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị là: $A(0;2), B(-1;1), C(1;1)$.

$AB=\sqrt{(-1-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}; AC=\sqrt{(1-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}; BC=\sqrt{(1+1)^2+(1-1)^2}=2.$

Do $AB=AC$ nên ΔABC cân tại A.

+ Gọi M là trung điểm của BC thì $M(0;1)$; $AM\perp BC$; $AM=\sqrt{(1-2)^2}=1$.

Vậy $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AM.BC=\frac{1}{2}.1.2=1.$

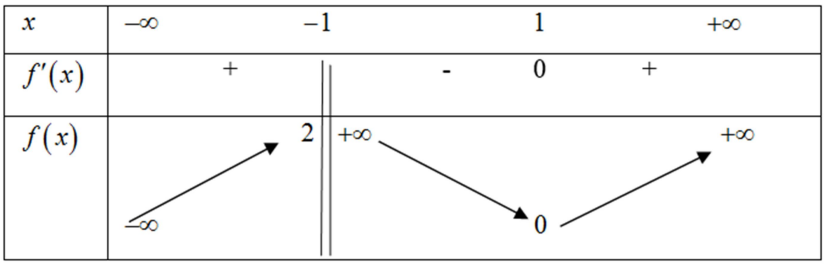
Cách khác:

Áp dụng công thức tính nhanh:

ΔABC có $\overrightarrow{AB}=(x_1;y_1), \overrightarrow{AC}=(x_2;y_2)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;-1), \overrightarrow{AC}=(1;-1)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|(-1)(-1)-(-1)1|=1$.

Câu 12. [2D1-2.3-2] Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số không có cực trị.

B. Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=-1$.

C. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Lời giải

Chọn C

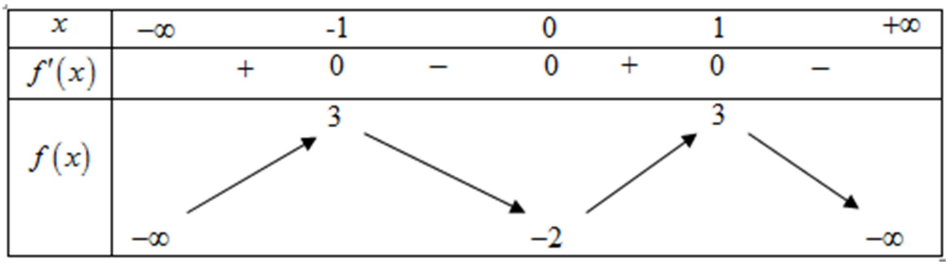
Từ bảng biến thiên trên ta thấy:

Hàm số đã cho có 1 điểm cực trị suy ra đáp án **A** và **D** sai.

Hàm số có đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm qua $x=-1$, nhưng hàm số không xác định tại $x=-1$ nên hàm số không đạt cực trị tại $x=-1$. Suy ra đáp án **B** sai.

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=1$. Suy ra đáp án **C** đúng.

Câu 13. [2D1-2.3-2] Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới



Hàm số $g(x)=f(x+1)$ đạt cực tiểu tại

A. $x=\dfrac{1}{2}$.

B. $x=-1$.

C. $x=1$.

D. $x=0$.

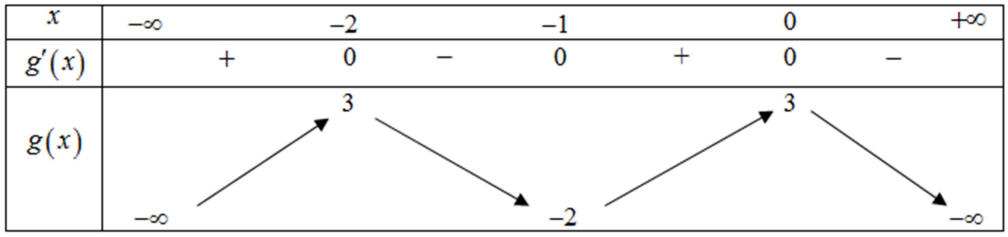
Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f(x+1)$, có $g'(x)=f'(x+1)$.

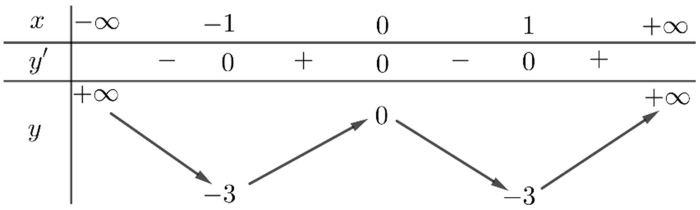
Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=-1\\x+1=0\\x+1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=0\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$.



Từ bảng biến thiên của hàm $g(x)$, ta thấy hàm số $g(x)=f(x+1)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Câu 14. [2D1-2.3-2] Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:



Hàm số $g(x)=f(2x-1)$ đạt cực đại tại

A. $x=0$. **B.** $x=\frac{1}{2}$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

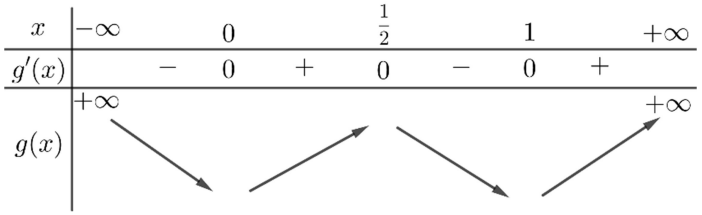
Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=(2x-1)'.f'(2x-1)=2f'(2x-1)$.

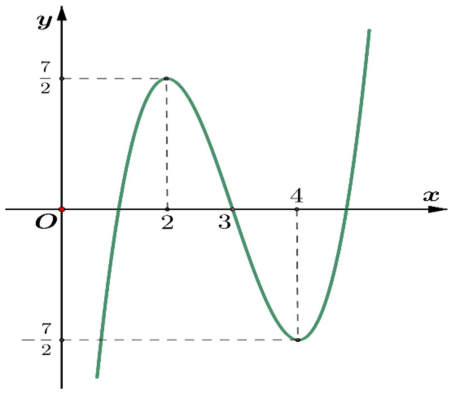
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=-1\\2x-1=0\\2x-1=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{1}{2}\\x=1\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:



Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=\frac{1}{2}$.

Câu 15. [2D1-2.3-2] Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Giá trị cực đại của hàm số $g(x)=f(x)+1$ là

A. 2. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 4. **D.** $\frac{9}{2}$.

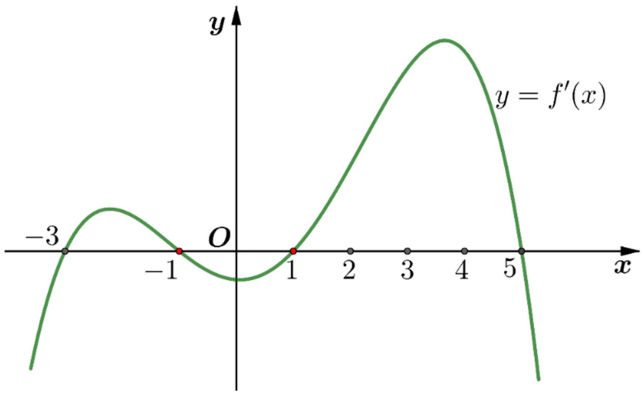
Lời giải

Ta có: $g'(x)=\left[f(x)+1\right]'=f'(x)$.

Từ đồ thị của hàm số ta thấy $f(x)$ đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=4$ nên hàm số $f(x)+1$ cũng đạt cực đại tại $x=2$.

Vậy giá trị cực đại của $g(x)$ là $f(2)+1=\frac{7}{2}+1=\frac{9}{2}$.

Câu 16. [2D1-2.3-3] Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f(x)$ có

A. hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu. **B.** một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

C. hai điểm cực đại và hai điểm cực tiểu. **D.** một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Lời giải

Xét hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=f'(x)$.

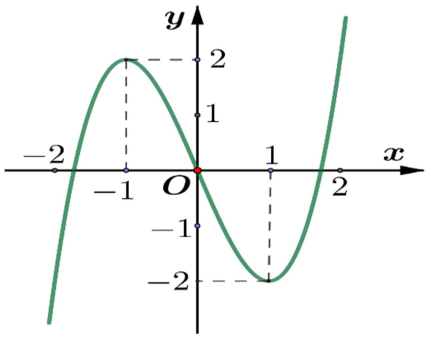
$$y'=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\\x=1\\x=5\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		1		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số $y=f(x)$ có hai cực đại và hai cực tiểu.

Câu 17. [2D1-2.3-3] Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=\left(x^2-2\right)'.f'\left(x^2-2\right)=2x.f'\left(x^2-2\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-2=-1\\ x^2-2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 18. [2D1-2.3-3] Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3\left(x^3+3x\right)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=3\left(3x^2+3\right)f'\left(x^3+3x\right).f^2\left(x^3+3x\right)$.

Ta thấy $g'(x)=3\left(3x^2+3\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f^2\left(x^3+3x\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ chính là dấu của $f'\left(x^3+3x\right)$

$$f'\left(x^3+3x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+3x=-1 \\ x^3+3x=0 \\ x^3+3x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\approx -0,32 \\ x=0 \\ x=x_2\approx 0,32 \end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên của hàm $f\left(x\right)$ ta có $f'\left(x\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ x>1 \end{array}\right.$

Do đó $f'\left(x^3+3x\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x^3+3x<0 \\ x^3+3x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1<x<0 \\ x>x_2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g\left(x\right)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 19. **[2D1-2.3-3]** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2018	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $g\left(x\right)=\left|f(x-2017)+2018\right|$ có bao nhiêu cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

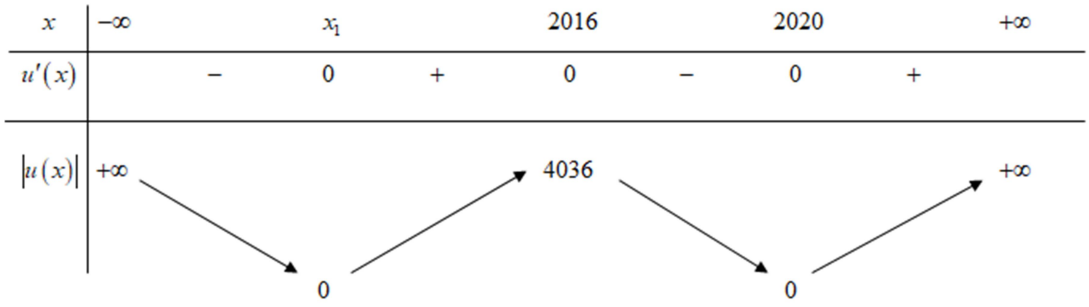
Chọn B

Đồ thị hàm số $u\left(x\right)=f(x-2017)+2018$ có được từ đồ thị $f\left(x\right)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $f\left(x\right)$ sang phải 2017 đơn vị và lên trên 2018 đơn vị. Suy ra bảng biến thiên của $u\left(x\right)$.

x	$-\infty$		2016		2020		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4036	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

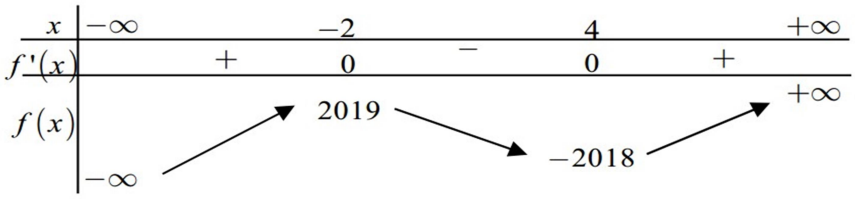
Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $u\left(x\right)=f(x-2017)+2018$ ta có bảng biến

thiên của hàm số $g(x)=|u(x)|$ như hình vẽ bên dưới



Từ BBT của hàm số $g(x)=|u(x)|$ ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị

Câu 20. [2D1-2.3-4] Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tìm giá trị cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x\right)-\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x-\frac{2}{15}$ trên đoạn $[-1;2]$?

A. 2022. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

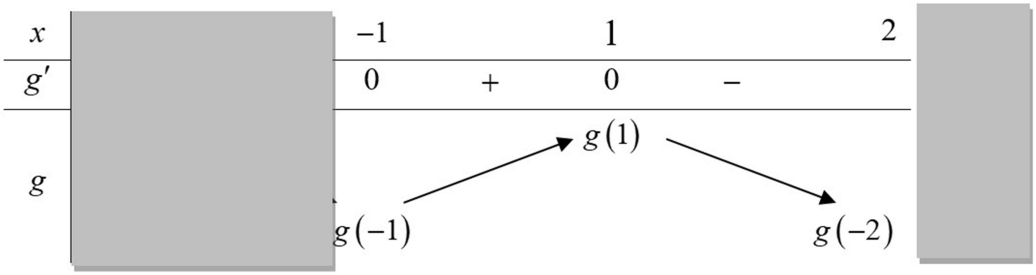
Chọn D

$g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right)-x^4-2x^2+3=\left(x^2-1\right)\left[3f'\left(x^3-3x\right)-x^2-3\right]$

Mà $x\in[-1;2]\Rightarrow x^3-3x\in[-2;2]\Rightarrow f'\left(x^3-3x\right)<0\Rightarrow 3f'\left(x^3-3x\right)-x^2-3<0$, do đó

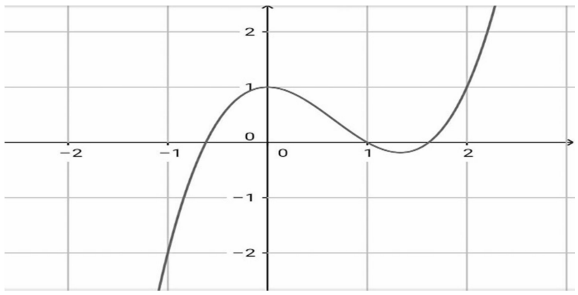
$g'(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên đoạn $[-1;2]$



Vậy giá trị cực trị của hàm số là $g(1)=f(-2)+2=2021$.

Câu 21. [2D1-2.3-4] Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?



A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=2$.

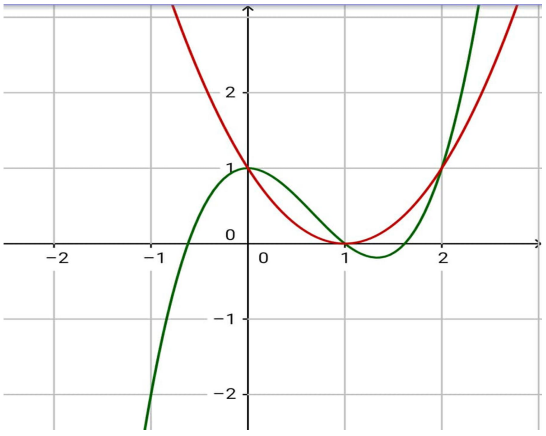
Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x)-(x-1)^2$

Điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ tức là nghiệm của phương trình $f'(x)=(x-1)^2$ suy ra điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ cũng là hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y=f'(x); y=x^2-2x+1$.

Vẽ đồ thị của các hàm số $y=f'(x); y=x^2-2x+1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:

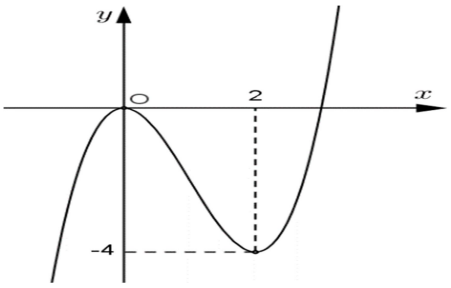


Dựa vào đồ thị trên ta có BBT của hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Câu 22. **[2D1-2.3-3]** Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f[f(x)]$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f\left[f\left(x\right)\right]$, $y'=f'\left(x\right).f'\left[f\left(x\right)\right]$;

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f'\left[f\left(x\right)\right]=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\f\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=a\in\left(2;+\infty\right)\\x=b\in\left(a;+\infty\right)\end{array}\right.$$

Với $x\in\left(-\infty;0\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'\left(x\right)>0\\f\left(x\right)<0\Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right]>0\end{array}\right.\Rightarrow y'>0$.

Với $x\in\left(0;2\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'\left(x\right)<0\\f\left(x\right)<0\Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right]>0\end{array}\right.\Rightarrow y'<0$.

Với $x\in\left(2;a\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'\left(x\right)>0\\f\left(x\right)<0\Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right]>0\end{array}\right.\Rightarrow y'>0$.

Với $x\in\left(a;b\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'\left(x\right)>0\\0<f\left(x\right)<2\Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right]<0\end{array}\right.\Rightarrow y'<0$.

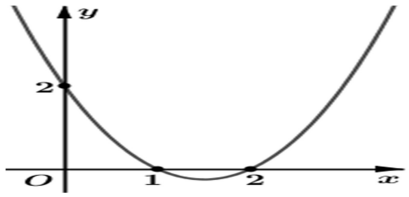
Với $x\in\left(b;+\infty\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'\left(x\right)>0\\f\left(x\right)>2\Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right]>0\end{array}\right.\Rightarrow y'>0$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y=f\left[f\left(x\right)\right]$ có bốn điểm cực trị.

Câu 23. **[2D1-2.3-4]** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(1-x^2\right)+2019$ có mấy điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

$g(x)=f(1-x^2)+2019 \Rightarrow g'(x)=-2x.f'(1-x^2)$.

Theo đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(1-x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 1-x^2=1 \\ 1-x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$

Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau, chọn $x=1\in(0;+\infty)$

- $x=1 \Rightarrow -2x<0.\ (1)$
- $x=1 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow f'(1-x^2)=f'(0)=2>0.\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $g'(1)<0$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

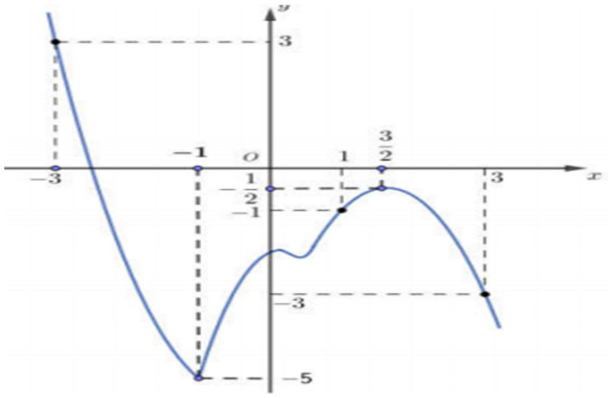
Nhận thấy nghiệm của $g'(x)=0$ là nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án ta chọn A

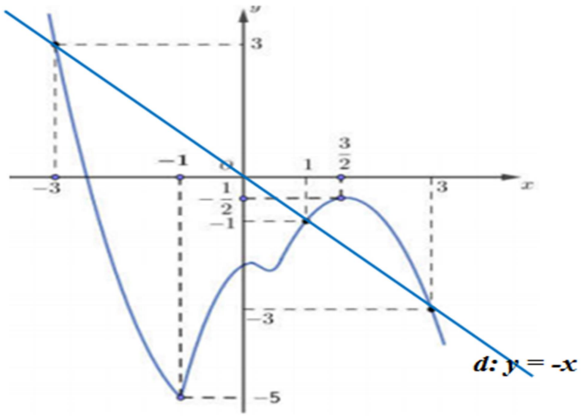
Câu 24. [2D1-2.3-4] Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$.



A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B



Xét hàm số $y=f\left(1-x\right)+\dfrac{x^2}{2}-x$ có $y'=-f'\left(1-x\right)+x-1$.

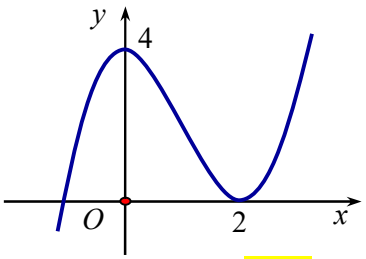
$$y'=0\Leftrightarrow -f'\left(1-x\right)+x-1=0\Leftrightarrow f'\left(1-x\right)=-\left(1-x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x=-3\\1-x=1\\1-x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=0\\x=-2\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗		↘	$-\infty$

Do đó hàm số $y=f\left(1-x\right)+\dfrac{x^2}{2}-x$ có 1 điểm cực tiểu.

Câu 25. [2D1-2.3-4] Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)$. Hàm số $y=g\left(x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có: $g'\left(x\right)=\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)'.f'\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}.f'\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1}{2}\\ f'\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1}{2}\\ \sqrt{x^2+x+2}=0\\ \sqrt{x^2+x+2}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1}{2}\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Cách 2:

Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Nhận thấy hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị $A(0;4),B(2;0)$

Khi đó: $\begin{cases}f(0)=4\\ f'(0)=0\\ f(2)=0\\ f'(2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=4\\ 12a+4b+c=0\\ 8a+4b+2c+d=0\\ c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-3\\ c=0\\ d=4\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+4$.

Ta có $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)=\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^3-3\left(x^2+x+2\right)+4$

$\Rightarrow g'(x)=\dfrac{3}{2}(2x+1)\sqrt{x^2+x+2}-3(2x+1)=3(2x+1)\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+x+2}-1\right)$.

$$g'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 26. [2D1-2.8-2] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai cực trị?

A. $m>3$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m<3$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

Ta có : $y'=3x^2-6x+m.$

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\neq 0 \\ \Delta'=(-3)^2-3m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 9-3m>0 \Leftrightarrow m<3.$$

Vậy với $m<3$ thì hàm số có hai cực trị.

Câu 27. [2D1-2.8-3] Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(2m-6)x^3-(m+2)x^2+(m+2)x+3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên
của tham số m để hàm số có hai cực trị?

A. 7 . **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10 .

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=(2m-6)x^2-2(m+2)x+m+2.$

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-6\neq 0 \\ \Delta'=(m+2)^2-(2m-6).(m+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ (m+2)(8-m)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ -2<m<8 \end{cases}.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1;2;4;5;6;7\}$.
Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28. [2D1-2.8-2] Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3mx^2+2mx-1$ không có cực trị là

A. $0<m<\frac{4}{3}$. **B.** $0\le m\le\frac{4}{3}$. **C.** $-\frac{4}{3}\le m\le 0$. **D.** $-\frac{4}{3}<m<0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=6x^2+6mx+2m$.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta'=9m^2-12m\le 0 \Leftrightarrow 0\le m\le\frac{4}{3}.$$

Câu 29. [2D1-2.8-3] Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(m-1)x^3-(m-1)x^2+2mx+m+3$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 2019 của tham số m để hàm số trên không có cực trị?

A. 2018 . **B.** 2019 . **C.** 1. **D.** 3 .

Lời giải

Trường hợp 1: Với $m=1 \Rightarrow y=2x+4$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không có cực trị.

Trường hợp 2: Với $m \neq 1 (*)$, khi đó ta có: $y'=(m-1)x^2-2(m-1)x+2m$.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'=(m-1)^2-2m(m-1) \leq 0 \Leftrightarrow -m^2+1 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta có $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$.

Vậy $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{array}\right. \\ m \in \mathbb{N}^*, m<2019 \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{1;2;3;...;2018\} \Rightarrow$ có 2018 giá trị của tham số thực m.

Câu 30. [2D1-2.9-2] Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào sau đấy đúng?

A. $m_0 \in (-1;7)$. **B.** $m_0 \in (7;10)$. **C.** $m_0 \in (-7;-1)$. **D.** $m_0 \in (-15;-7)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x+m$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=9-3m>0 \Leftrightarrow m<3$.

Hệ thức Vi-ét: $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{m}{3} \end{array}\right.$.

Ta có $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=13$.

Thay hệ thức Vi-ét vào, ta được $4-m=13 \Leftrightarrow m=-9$.

Câu 31. [2D1-2.9-3] Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để đồ

thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu , đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

A. $\dfrac{5}{4} \leq m \leq \dfrac{7}{5}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<\dfrac{5}{4} \\ m>\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ \dfrac{5}{4}<m<\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \leq \dfrac{5}{4} \\ m \geq \dfrac{7}{5} \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

$y'=3x^2+2(1-2m)x+(2-m)$.

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<x_2<1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2-m-5>0 \\ (x_1-1)(x_2-1)>0 \quad (1) \\ x_1+x_2<2 \end{cases}$$

Hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2(1-2m)}{3} \\ x_1x_2=\dfrac{2-m}{3} \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1; m>\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{2-m}{3}-\dfrac{-2(1-2m)}{3}+1>0 \\ \dfrac{-2(1-2m)}{3}-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1; m>\dfrac{5}{4} \\ m<\dfrac{7}{5} \\ m<2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ \dfrac{5}{4}<m<\dfrac{7}{5} \end{array}\right.$$

Câu 32. [2D1-2.9-3] Cho hàm số $y=x^3-3mx+m-1$ có đồ thị (C), với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị (C) có hai điểm cực trị là A, B cùng với điểm $C(0;-1)$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 10?

A. 7. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-3m=0 \Leftrightarrow x^2=m \quad (*)$

Để đồ thị (C) có 2 điểm cực trị thì $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó: $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{m}$.

Đặt: $A\left(\sqrt{m};-2m\sqrt{m}+m-1\right)$ và $B\left(-\sqrt{m};2m\sqrt{m}+m-1\right)$.

Và $\overrightarrow{CA}=\left(\sqrt{m};-2m\sqrt{m}+m\right); \overrightarrow{CB}=\left(-\sqrt{m};2m\sqrt{m}+m\right)$.

Ta lại có: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\sqrt{m}.\left(2m\sqrt{m}+m\right)-\left(-\sqrt{m}\right).\left(-2m\sqrt{m}+m\right)\right|=m\sqrt{m}$ (Vì $m>0$).

Theo đề: $S_{ABC}<10 \Leftrightarrow m\sqrt{m}<10 \Leftrightarrow m^3<100 \Leftrightarrow m<\sqrt[3]{100}$

Kết hợp với điều kiện $m>0$ ta được $0<m<\sqrt[3]{100}$. Suy ra $m\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy: có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu.

Câu 33. [2D1-2.9-3] Đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm $M\left(2m^3;m\right)$ tạo với hai điểm A và B một tam giác có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-7;-3)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(3;7)$. **D.** $(7;13)$.

Lời giải

Chọn B

$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 6(x-m)(x-m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+1 \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị với $\forall m$.

Với $x = m \Rightarrow y = 2m^3 + 3m^2 + 1 \Rightarrow A(m; 2m^3 + 3m^2 + 1)$.

Với $x = m+1 \Rightarrow y = 2m^3 + 3m^2 \Rightarrow B(m+1; 2m^3 + 3m^2)$.

Có $\overrightarrow{AB} = (1; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là: $x + y - 2m^3 - 3m^2 - m - 1 = 0$.

Diện tích tam giác MAB nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(M, AB)$ nhỏ nhất.

$$d(M, AB) = \frac{|2m^3 + m - 2m^3 - 3m^2 - m - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|-3m^2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3m^2 + 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(M, AB) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dấu = xảy ra $m = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S_{MAB} = \frac{1}{2} d(M, AB).AB = \frac{1}{2}$, đạt khi $m = 0$.

Câu 34. **[2D1-2.16-2]** Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 + (m-3)x + m$ (m là tham số), có đồ thị (C_m). Tìm tất cả các giá

trị thực của m để (C_m) có hai điểm cực trị và điểm $M(9; -5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m).

A. $m = -5$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 4x + m - 3$.

(C_m) có hai điểm cực trị khi: phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Hay: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - 3(m-3) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{3}$.

Ta có: $y = y'.\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{2m}{3} - \frac{26}{9}\right)x + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3}$.

Nên phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của (C_m) là:

$y = \left(\frac{2m}{3} - \frac{26}{9}\right)x + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3}$.

Đường thẳng d đi qua $M(9; -5)$ nên:

$\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right).9+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}=-5 \Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn).

Câu 35. **[2D1-2.16-3]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng d: $y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $m=\frac{1}{6}$. **B.** $m=\frac{-1}{3}$. **C.** $m=\frac{1}{3}$. **D.** $m=\frac{-1}{6}$.

Lời giải

họn D

Ta có $y'=3x^2-6x$

Ta có: $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'-2x-1$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho

$\Rightarrow \Delta: y=-2x-1$

d vuông góc với Δ nên: $(3m+1).(-2)=-1 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$.

Câu 36. **[2D1-2.10-3]** Cho hàm số $y=(m+1)x^4-2x^2+1$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của m để
hàm số đã cho có ba điểm cực trị đều nhỏ hơn 1.

A. $-1<m<0$. **B.** $m>-1$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn D

Trường hợp 1: Nếu $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ thì hàm số đã cho trở thành: $y=2x^2+1$, hàm số này có một điểm cực trị, do đó ta loại trường hợp này.

Trường hợp 2: Nếu $m+1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$

Ta có $y'=4(m+1)x^3-4x=4x\left[(m+1)x^2-1\right]$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (m+1)x^2-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\frac{1}{m+1} \quad (1) \end{array}\right.$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị đều nhỏ hơn 1 khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 và nhỏ hơn 1, hay: $0<\frac{1}{m+1}<1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{m+1}>0 \\ \frac{1}{m+1}<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{m+1}>0 \\ \frac{-m}{m+1}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>-1 \\ \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m>0$.

Câu 37. **[2D1-2.10-2]** Cho hàm số $y=(m-2)x^4+(m-1)x^2-3$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị.

A. $m\in[2;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;1]\cup(2;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;1]$. **D.** $m\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Trường hợp 1: Nếu $m-2=0\Leftrightarrow m=2$ thì hàm số đã cho trở thành $y=x^2-3$, có 1 điểm cực trị (thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Trường hợp 2: Nếu $m-2\neq 0\Leftrightarrow m\neq 2$.

Ta có $y'=4(m-2)x^3+2(m-1)x=2x\left[2(m-2)x^2+m-1\right]$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2(m-2)x^2+m-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=\dfrac{1-m}{2(m-2)}\end{array}\right.\quad(1)$$

Hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất hay phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$, hay: $\dfrac{1-m}{2(m-2)}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\m\leq 1\end{array}\right.$.

Kết hợp với trường hợp 1 ta được: $m\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Cần nhớ:

+ Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đúng một cực trị khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l}ab\geq 0\\a^2+b^2>0\end{array}\right.(1)$

+ Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có ba cực trị khi và chỉ khi $ab<0.(2)$

Câu 38. **[2D1-2.11-3]** Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+1$ đều thuộc khoảng $(-1;1)$.

A. $(-1;1)$. **B.** $\left(-\dfrac{4}{5};0\right)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho có ba cực trị $\Leftrightarrow ab<0\Leftrightarrow -2(m+1)<0\Leftrightarrow m>-1$.

$y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left(x^2-m-1\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in(-1;1)\\x=\pm\sqrt{m+1}\end{array}\right.$$

Hoành độ các điểm cực đại và cực tiểu đều thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi

$\pm\sqrt{m+1}\in(-1;1)\Leftrightarrow\sqrt{m+1}<1\Leftrightarrow -1<m<0$.

Kết hợp điều kiện hàm số có 3 cực trị ta được tập hợp các giá trị của m là $(-1;0)$.

Câu 39. **[2D1-2.11-3]** Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2\left(m^2-m+1\right)x^2+m-1$ có 3 điểm cực trị, đồng thời hoành độ hai điểm cực tiểu x_1; x_2 thỏa điều kiện $|x_1-x_2|\leq 2$.

A. $\left(0;\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. **B.** $\left[\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right]$. **C.** $(0;1]$. **D.** $[0;1]$.

Lời giải

Hàm số đã cho có ba cực trị $\Leftrightarrow ab<0\Leftrightarrow -2\left(m^2-m+1\right)<0\Leftrightarrow m^2-m+1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$..

Ta có $y'=4x^3-4\left(m^2-m+1\right)x=4x\left(x^2-m^2+m-1\right)$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m^2-m+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m^2-m+1}\end{array}\right.$.

Nhận thấy $x=0$ là điểm cực đại của hàm số nên suy ra $x_{1,2}=\pm\sqrt{m^2-m+1}$.

Do đó $\left|x_1-x_2\right|\le 2\Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-m+1}\le 2\Leftrightarrow\sqrt{m^2-m+1}\le 1\Leftrightarrow m^2-m\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 1$.

Vậy tập hợp các giá trị của m cần tìm là $[0;1]$.

Câu 40. **[2D1-2.11-4]** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+2m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho O, A, B, C là bốn đỉnh của một hình thoi (với O là gốc tọa độ).

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4x^3-4m^2x=4x\left(x^2-m^2\right)=0$. Phương trình $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm m\end{array}\right.$.

Vậy với điều kiện $m\ne 0$ hàm số có 3 điểm cực trị là $A\left(0;2m\right), B\left(-m;-m^4+2m\right)$, $C\left(m;-m^4+2m\right)$.

Ta có $\overrightarrow{OB}=\left(-m;-m^4+2m\right);\ \overrightarrow{CA}=\left(-m;m^4\right)$.

Vì tứ giác $ABOC$ có hai đường chéo AO và BC vuông góc và $AB=AC$ nên nó là hình bình hành khi và chỉ khi: $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow -m^4+2m=m^4\Leftrightarrow 2m\left(m^3-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\ (l)\\m=1\end{array}\right.$.

Câu 41. **[2D1-2.11-4]** Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0;-3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(\frac{9}{5};2\right)$. **B.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4x\left(x^2-m\right)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$.

Với điều kiện $m>0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A\left(0;m^4-2m^2\right);\ B\left(-\sqrt{m};m^4-3m^2\right)$; $C\left(\sqrt{m};m^4-3m^2\right)$. Để $ABDC$ là hình thoi điều kiện là $BC\perp AD$ và trung điểm I của BC

trùng với trung điểm J của AD. Do tính đối xứng ta luôn có $BC \perp AD$ nên chỉ cần $I \equiv J$ với $I\left(0;\, m^4-3m^2\right), J\left(0;\dfrac{m^4-2m^2-3}{2}\right)$.

ĐK : $m^4-2m^2-3=2m^4-6m^2 \Leftrightarrow m^4-4m^2+3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow m \in \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{5}\right)$.

Câu 42. **[2D1-2.7-2]** Để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nào?

A. $(0;2)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Đạo hàm: $y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=2$ thì $y'(2)=0 \Rightarrow \dfrac{4+4m+m^2-1}{(2+m)^2}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

+) **TH1:** Với $m=-3 \Rightarrow y'=\dfrac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=2$ nên $m=-3$ ta nhận.

+) **TH2:** Với $m=-1 \Rightarrow y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ nên $m=-1$ ta loại.

Câu 43. **[2D1-2.15-3]** Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A,B. Khi $\widehat{AOB}=90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** 8. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

$$y'=\frac{(2x+m)(x-1)-x^2-mx-m^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-(m+m^2)}{(x-1)^2}.$$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B thì $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1+m+m^2>0\\-1-m-m^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\forall m\in\mathbb{R}.$$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y=\dfrac{\left(x^2+mx+m^2\right)'}{(x-1)'}=2x+m$.

Gọi $x_A;x_B$ là hoành độ của A, B khi đó $x_A;x_B$ là nghiệm của phương trình $x^2-2x-(m+m^2)=0$.

Theo định lí Viet ta có $x_A+x_B=2$; $x_A.x_B=-m^2-m$.

$y_A=2x_A+m$; $y_B=2x_B+m$.

$\widehat{AOB}=90^\circ\Rightarrow x_A.x_B+y_A.y_B=0\Leftrightarrow x_Ax_B+4x_Ax_B+2m(x_A+x_B)+m^2=0$

$\Leftrightarrow 5(-m^2-m)+4m+m^2=0\Leftrightarrow -4m^2-m=0\Leftrightarrow m=0;m=-\dfrac{1}{4}$.

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng: $0^2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.

Câu 44. **[2D1-2.7-2]** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+mx^2$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. $m\le 0$. **B.** $m=0$. **C.** $m>0$. **D.** $m\ge 0$.

Lời giải

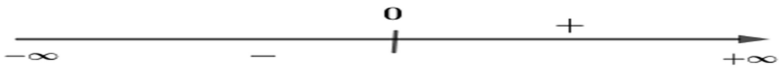
Chọn D

Cách 1:

Xét hàm số $y=x^4+mx^2$.Có $y'=4x^3+2mx$.

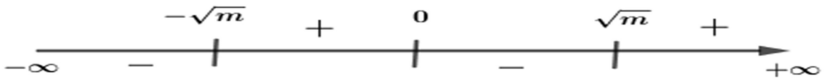
$$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x^2=-m\end{cases}$$

+) Trường hợp 1: $y'=0$ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ $m\ge 0$. Ta có trục xét dấu y'



Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$. Vậy $m\ge 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài

+) Trường hợp 2: $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $m<0$. Ta có trục xét dấu y'



Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.Vậy $m<0$ không thỏa mãn

Vậy để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì $m\ge 0$.

Cách 2:

Xét hàm số $y=x^4+mx^2$.Ta có $y'=4x^3+2mx$. Thấy $y'=0$ có nghiệm $x=0$

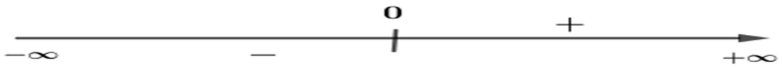
Ta có $y''=12x^2+2m$.

Thấy $y'(0)=0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ ta xét 2 trường hợp sau :

+) Trường hợp 1: $y''(0)>0\Rightarrow 2m>0\Rightarrow m>0$.

+) Trường hợp 2: $y''(0)=0\Rightarrow 2m=0\Rightarrow m=0$. Thay vào ta được $y'=4x^3$



y' có sự đổi dấu từ âm sang dương tại $x=0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Vậy $m\ge 0$ là giá trị cần tìm .

Câu 45. [2D1-2.7-3] Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Cách 1

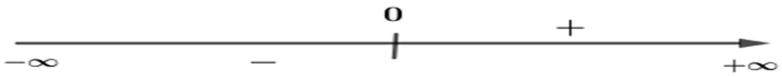
Xét hàm số $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1=x^3\left[8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)\right]$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)=0\end{array}\right.$$

Xét phương trình $8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)=0$ $(*)$

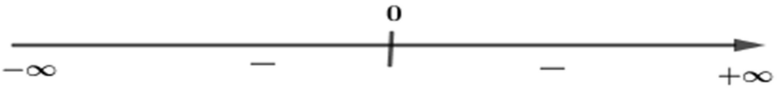
***) Trường hợp 1**: $x=0$ là nghiệm của phương trình (*) thì ta được $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2\end{array}\right.$

+) Với $m=2$ ta có $y'=8x^7$



Ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$. Nên $m=2$ thỏa mãn đề bài (1)

+) Với $m=-2$ ta có $y'=8x^7-20x^4$



Hàm số không đạt cực trị tại $x=0$. Nên $m=-2$ không thỏa mãn đề bài.

***)Trường hợp 2**: $x=0$ không là nghiệm của phương trình (*)

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(8x^4+5(m-2)x-4\left(m^2-4\right)\right)>0$

$\Leftrightarrow 4\left(m^2-4\right)<0 \Leftrightarrow -2<m<2$

Vì m là số nguyên nên $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $m\in\{-1,0,1,2\}$.

Cách 2

Xét hàm số $y=x^8+(m-2)x^5-\left(m^2-4\right)x^4+1$

+ $y'=8x^7+5(m-2)x^4-4\left(m^2-4\right)x^3$

$y'(0)=0$ với $\forall m$

+ $y''=56x^6+20(m-2)x^3-12\left(m^2-4\right)x^2$

$y''(0)=0$ với $\forall m$

+ $y^{(3)}=336x^5+60(m-2)x^2-24\left(m^2-4\right)x$

$y^{(3)}(0)=0$ với $\forall m$

+ $y^{(4)}=1680x^4+120(m-2)x-24\left(m^2-4\right)$

$y^{(4)}(0)=-24\left(m^2-4\right)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ ta xét 2 trường hợp sau :

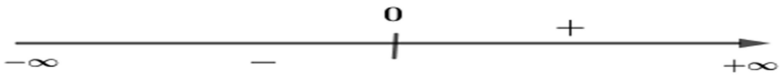
*)**Trường hợp 1**: $y^{(4)}(0)>0$

$\Rightarrow -24\left(m^2-4\right)>0 \Rightarrow -2<m<2$ (1)

*)**Trường hợp 2**: $y^{(4)}(0)=0$

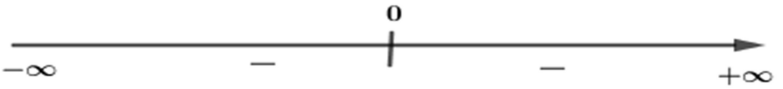
$\Rightarrow -24\left(m^2-4\right)=0 \Rightarrow m=2$ hoặc $m=-2$.

+) Với $m=2$ ta có $y'=8x^7$



Ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$. Vậy $m=2$ thỏa mãn đề bài (2)

+) Với $m=-2$ ta có $y'=8x^7-20x^4$

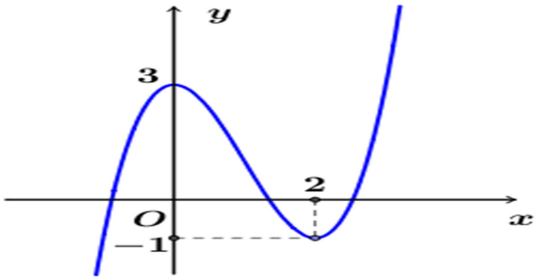


Ta thấy hàm số không đạt cực tiểu tại $x=0$. Vậy $m=-2$ không thỏa mãn đề bài

Kết hợp (1) (2) ta được $-2<m\le 2$ là giá trị cần tìm.

Vậy 4 giá trị m nguyên $m\in\{-1,0,1,2\}$

Câu 46. [2D1-2.4-2] Cho đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+3$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=|x^3-3x^2+3|$ là

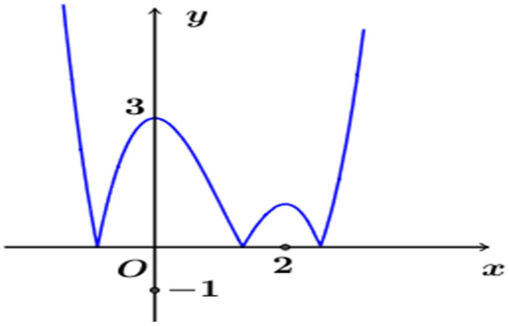
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+3$ ta giữ nguyên phần phía trên trục Ox gọi là (C_1).

Phần phía dưới Ox ta lấy đối xứng qua Ox ta được (C_2). Hợp của (C_1) và (C_2) là đồ thị của hàm số $y=|x^3-3x^2+3|$ cần tìm.



Từ đó ta nhận thấy đồ thị hàm số $y=|x^3-3x^2+3|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 47. [2D1-2.4-4] Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ thỏa mãn $c>2019$, $a+b+c-2018<0$.

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)-2019|$

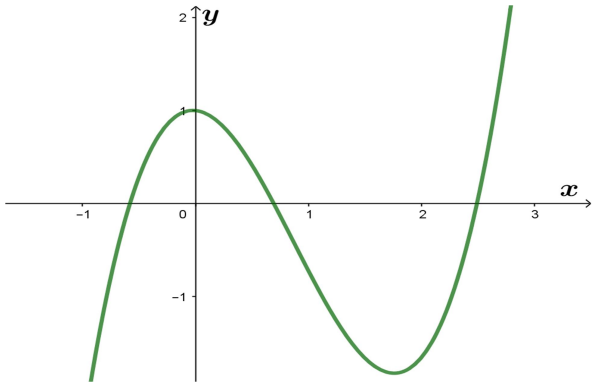
A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

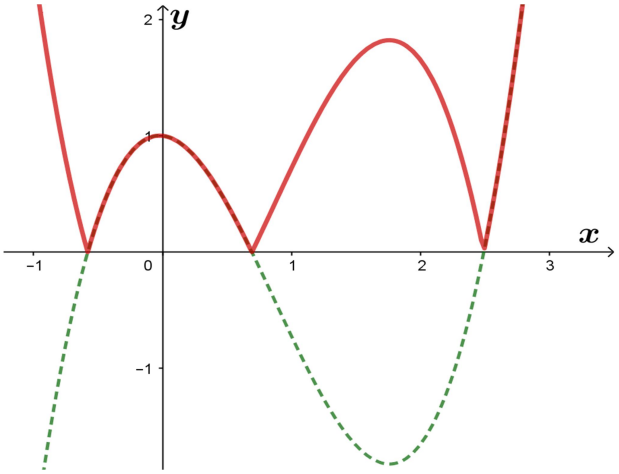
Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f(x)-2019$ ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty\\ g(0)=c-2019>0\\ g(1)=a+b+c-2018<0\end{cases}$.

Do đó đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt nên $y=g(x)$ có hai điểm cực trị. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có dáng điệu như sau



Từ đồ thị $y=g(x)$, ta giữ nguyên phần phía trên trục Ox, phần dưới trục Ox ta lấy đối xứng qua trục Ox, ta được đồ thị hàm số $y=|g(x)|$.



Từ đó ta nhận thấy đồ thị $y=|g(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 48. [2D1-2.4-4] Số nguyên bé nhất của tham số m sao cho hàm số $y=|x|^3-2mx^2+5|x|-3$ có 5 điểm cực trị là

A. -2. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Hàm số $y=|x|^3-2mx^2+5|x|-3$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f(x)=x^3-2mx^2+5x-3$ có hai điểm cực trị có hoành độ dương.

Ta có $f'(x)=3x^2-4mx+5$.

$y=f(x)$ có hai điểm cực trị dương khi $f'(x)=0$ có hai nghiệm dương hay

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-15>0\\ \dfrac{4m}{3}>0\\ \dfrac{5}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Do đó, giá trị nguyên bé nhất của tham số m sao cho hàm số $y=|x|^3-2mx^2+5|x|-3$ có 5 điểm cực trị là 2 .

Câu 49. [2D1-2.14-4] Cho hàm số $f(x)=x^4-(2m+1)x^3+(m+4)x^2+(5m-6)x+2m-12$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y=|f(x)|$ có số điểm cực trị nhiều nhất ?

A. 15. **B.** 16. **C.** 13. **D.** 14.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $\mathbb{R}$ và cũng là tập xác định của hàm số $y=|f(x)|$.

Ta có, hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc 4 nên nó có tối đa 3 điểm cực trị là x_1, x_2, x_3 và đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_4, x_5, x_6, x_7 .

Do đó, hàm số $y=|f(x)|$ có nhiều nhất là 7 điểm cực trị, chính là các điểm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.

Vậy để hàm số $y=|f(x)|$ có nhiều điểm cực trị nhất thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt hay $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ta có

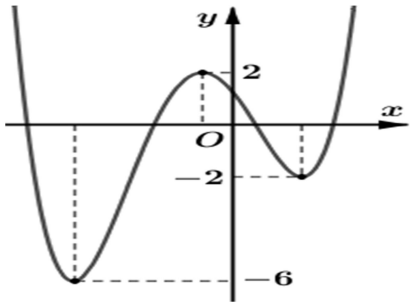
$f(x)=0\Leftrightarrow x^4-(2m+1)x^3+(m+4)x^2+(5m-6)x+2m-12=0$

$\Leftrightarrow(x+1)(x-2)(x^2-2mx+6-m)=0$

Suy ra $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $g(x)=x^2-2mx+6-m$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 và khác 2 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2+m-6>0\\ g(-1)\neq 0\\ g(2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-3\\ m>2\end{array}\right.\\ m\neq -7\end{cases}$.

Từ đó ta được $m\in\{-10;-9;-8;-6;-5;-4;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Có 14 số nguyên thỏa mãn.

Câu 50. [2D1-2.14-4] Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tính tổng bình phương tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=\left|f(x+2019)+3-2m\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 1. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ và số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x+2019)+3-2m$ với trục hoành.

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên hàm $f(x+2019)+3-2m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó, số điểm cực trị nhiều nhất của hàm số $y=g(x)$ là 7 khi phương trình $f(x+2019)+3-2m=0$ có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow f(x+2019)=2m-3$ có 4 nghiệm phân biệt hay $-2<2m-3<2\Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<\frac{5}{2}$ (Dựa vào đồ thị trên).

Do m là số nguyên nên ta chọn $m\in\{1;2\}$.

Vậy tổng bình phương tất cả các giá trị nguyên của tham số m là: $1^2+2^2=5$.